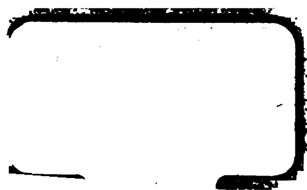




Geometry (IC)

Gründlicher und ausführlicher

Unterricht

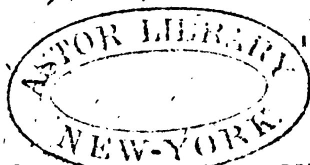
zur

praktischen Geometrie

von

Johann Tobias Mayer,

Königl. Grosbritt. Hofrath und Professor zu Göttingen.



Vierte verbesserte und vermehrte Auflage.

Erster Theil,

mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,

im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.

1814.

Vorbericht
zur ersten Auflage.

Bey der beträchtlichen Menge von Anleitungen zur Feldmeßkunst, möchte es wohl unnütz scheinen, selbige noch durch einen neuen Unterricht in dieser Wissenschaft zu vermehren. Eben diese Bedenklichkeit hätte mich beynahe abgehalten, gegenwärtiges Werk auszuarbeiten, und dem Drucke zu übergeben. Allein, da ich auf hiesiger Universität verschiedentlich auch in der praktischen Geometrie Unterricht zu ertheilen hatte, und aus dieser Ursache mir den dazu nöthigen Büchervorrath anschaffen

mußte, so bemerkte ich gar bald, daß die meisten Werke diesen Gegenstand der praktischen Mathematik viel zu mangelhaft behandeln, und sich entweder nur auf besondere Werkzeuge und Methoden einschränken, oder wenn sie sich ja über andere Messungsarten erstrecken, darinn einen viel zu dürftigen, ja oft nicht gründlichen Unterricht ertheilen. So findet man z. E. in des berühmten *Marinoni* Werke de re ichnographica Viennae 1751. zwar sehr vollständig den Gebrauch des Meßtisches, aber wenig von dem Astrolabio und andern unentbehrlichen Werkzeugen. Hrn. Kapitain Hogrevens Landvermessungen enthalten nur eine besondere Messungsart mit dem Meßtische, und Zollmanns Geodäsie ist, ausser wenigen Nachrichten von andern Werkzeugen, grossentheils nur mit dem Gebrauche der Meßscheibe beschäftigt. Penthers Feldmeßkunst erstreckt sich zwar auch über meh-

mehrere Werkzeuge, aber man vermißt darinn gar vieles zu einer richtigen und gründlichen Ausübung, und alles ist zu handwerksmäßig. Man findet hier, so wie in den meisten andern Werken über die Feldmeßkunst, weder eine genaue Theorie und Beschreibung der Werkzeuge, noch Methoden, sie zu prüfen, sie nach der Beschaffenheit und Zusammensetzung ihrer einzelnen Theile richtig zu behandeln, ihre Fehler zu schätzen, und die Folgen derselben zu berechnen. Man sucht vergebens nach allerley Hülfsmitteln, sich in schwürigen Fällen zu helfen, und eine schickliche Wahl der äussern Umstände zu treffen, unter denen sich Feldmesserarbeiten am leichtesten und zuverlässigsten bewerkstelligen lassen. Daß aber dieß und mehreres einem Feldmesser unentbehrlich ist, zumal, wenn er Messungen von Wichtigkeit anzustellen hat, bedarf keiner weitläuftigen Erörterung.

Das oben erwähnte Marinonische Werk, ist die einzige Anleitung zur Feldmeßkunst, die ich kenne, worin die Lehre von den Folgen der Fehler in den Messungen etwas vollständig abgehandelt ist. Indessen verdient sein synthetischer Vortrag kürzer und faßlicher gemacht zu werden; Herr Prof. Lambert hat die Theorie davon in seinen Beyträgen zur praktischen Geometrie analytisch auseinander gesetzt; anderer einzelner Abhandlungen zu geschweigen; übrigens verdient die Theorie der Fehler, in den systematischen Anleitungen zur Feldmeßkunst, allerdings ihre Stelle.

Meines Erachtens ist der kein gründlicher Feldmesser, der nicht zugleich die Richtigkeit seiner Messungen zu beurtheilen weiß, und einen ohngefähren Ueberschlag machen kann, unter welchen Umständen er mehr oder weniger vorsichtig verfahren habe.

Nach der Art, wie ich mir nun die ausübende Geometrie vorstelle, wird freylich zu einem geschickten Feldmesser etwas mehr Theorie erfordert, als wohl gemeiniglich voraus gesetzt zu werden pflegt. Ich habe, um einige allgemeine Begriffe von den Kenntnissen eines Feldmessers beyzubringen, davon im 12ten §. dieses Buchs geredet. Viele glauben, ein Feldmesser brauche weiter nichts zu wissen, als etwas Rechenkunst und Geometrie.

Wie nöthig aber besonders die Lehren von Decimalbrüchen, Logarithmen, von der Lage der ebenen Flächen gegen einander, nebst Trigonometrie, einem Feldmesser sind, davon wird man an vielen Stellen dieses Buches überzeugt werden; Da ich aber genöthiget bin, diese Lehren bey meinen Lesern vorauszusetzen, und ohne sie verschiedenes nicht ganz verständlich seyn würde; so rathe ich, daß man

sich solche vorher aus dem Kästnerischen oder Karstenschen Handbuche bekannt mache; Ich habe mich zur Abkürzung des Vortrages hin und wieder algebraischer Formeln, oder vielmehr nur Ausdrückungen in Buchstaben, bedient. Ich hoffe aber nicht, daß dieß viele meiner Leser abschrecken wird, da ich nicht für handwerksmäßige Feldmesser, sondern für solche, denen es um eine sichere und gründliche Praxis zu thun ist, geschrieben habe.

Ich habe nun bey gegenwärtiger Anleitung zur praktischen Feldmeßkunst die Absicht gehabt, das wichtigste, was einem Feldmesser nützlich ist, auf eine etwas vollständigere Art, als bisher geschehen ist, abzuhandeln, und habe daher manches beygebracht, was sonst eben in keinen Anleitungen zur Feldmeßkunst umständlich vorkömmt, z. E. die Theorie des Vernier, der Micrometerschraube, überhaupt allerley

len Einrichtungen, wodurch geometrische Werkzeuge einen größern Grad von Vollkommenheit erhalten, und sich von ältern Werkzeugen dieser Art unterscheiden. Eben diese Kenntnisse werden alsdann auch denenjenigen nützlich seyn, die größere, besonders zum geographischen Landmessen gehörige Werkzeuge, z. E. in den Werken eines *Bouguer*, *Maupertuis*, *Liesganig* u. a. näher kennen lernen wollen. Ich will nun kürzlich zeigen, was in dem ersten Theile dieser praktischen Geometrie abgehandelt wird.

Dieser ist vorzüglich mit Ausmessung gerader Linien und Winkel, sowohl auf dem Papiere, als auf dem Felde, beschäftiget; Es ist klar, daß die Entwerfung ganzer Landschaften hauptsächlich auf diesen Dingen beruht; hat man es hierinnen zu einer Fertigkeit gebracht, so werden sich zusammengesetzte Messungen de-

sto leichter begreiffen und vorstellen lassen. Im ersten bis zum sechsten Kapitel ist von dem Gegenstande der praktischen Geometrie, von Ausmessung gerader und krummer Linien, sowohl auf dem Felde, als auf dem Papiere, von den dazu gehörigen Instrumenten, und nöthigen Vorsichten bey ihrem Gebrauche, geredet. In eben diesen Kapiteln kommen sehr viele andere damit verwandte Untersuchungen vor, die beym Winkelmessen ihren Nutzen haben, und hier ihre Stelle fanden.

Ich hätte die Messung gerader Linien auf dem Papiere wohl, der Ordnung gemäß, vor der Messung auf dem Felde abhandeln müssen; allein da beyde Messungen, auf dem Papiere und dem Felde, nicht auf einander beruhen, so ist es gleichgültig in welcher Ordnung sie vorgetragen sind.

Das VII. Kapitel behandelt verschiedene Werkzeuge zur Winkelmessung auf dem Felde.

Das angegebene Astrolabium ist meines Erachtens so beschaffen, daß man, vermittelst desselben, mit weit mehr Zuverlässigkeit einen Winkel auf dem Felde ausmessen kann, als mit den meisten bisher sogenannten Astrolabiis. Dieses leisten besonders zwey von einander unabhängige Abtheilungen des Randes mit ihrem Vernier, die Micrometerschraube, und die übrigen Vorrichtungen, wodurch dem Werkzeuge ausser den groben Bewegungen auch die nöthigen sanften ertheilet werden, und ich bin versichert, daß, wenn die angegebenen einzelnen Theile dieses Astrolabii, die ausser dem Stative beynahe insgesammt von Messing seyn müssen, von einem Mechanico gut und fleissig gearbeitet sind, das Werkzeug sehr gute Dienste leisten





Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie

von

Johann Tobias Mayer,
Königl. Grosbritt. Hofrath und Professor zu Göttingen.

Vierte verbesserte und vermehrte Auflage.

Erster Theil,
mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.
1814.

Vorbericht
zur ersten Auflage.

)ey der beträchtlichen Menge von An-
ungen zur Feldmeßkunst, möchte es
l unnütz scheinen, selbige noch durch
n neuen Unterricht in dieser Wissen-
ft zu vermehren. Eben diese Bedenk-
keit hätte mich beynahe abgehalten, ge-
wärtiges Werk auszuarbeiten, und dem
icke zu übergeben. Allein, da ich auf
ger Universität verschiedentlich auch in
praktischen Geometrie Unterricht zu er-
en hatte, und aus dieser Ursache mir
dazu nöthigen Büchervorrath anschaffen

 mußte,

mußte, so bemerkte ich gar bald, daß d
meisten Werke diesen Gegenstand der prakt
schen Mathematik viel zu mangelhaft b
handeln, und sich entweder nur auf b
sondere Werkzeuge und Methoden ei
schränken, oder wenn sie sich ja über a
dere Messungsarten erstrecken, darinn
nen viel zu dürftigen, ja oft nicht grün
lichen Unterricht ertheilen. So findet m
z. E. in des berühmten *Marinoni* Wer
de re ichnographica Viennae 1751. zw
sehr vollständig den Gebrauch des Me
tisches, aber wenig von dem Astrolab
und andern unentbehrlichen Werkzeuge
Hrn. **Kapitain Hogrevens Lan
vermessungen** enthalten nur eine beso
dere Messungsart mit dem Meßtische, u
Zollmanns Geodäsie ist, ausser n
nigen Nachrichten von andern Werkzeuge
großentheils nur mit dem Gebrauche d
Meßscheibe beschäftigt. **Penthers Fel
meßkunst** erstreckt sich zwar auch üb

mel

ehrere Werkzeuge, aber man vermißt
arinn gar vieles zu einer richtigen und
ündlichen Ausübung, und alles ist zu
ndwerksmäßig. Man findet hier, so wie
den meisten andern Werken über die
ldmeßkunst, weder eine genaue Theorie
d Beschreibung der Werkzeuge, noch
ethoden, sie zu prüfen, sie nach der
schaffenheit und Zusammensetzung ihrer
zelnen Theile richtig zu behandeln, ihre
hler zu schätzen, und die Folgen dersel-
zu berechnen. Man sucht vergebens
h allerley Hülfsmitteln, sich in schwü-
en Fällen zu helfen, und eine schickliche
ahl der äussern Umstände zu treffen,
er denen sich Feldmesserarbeiten am
htesten und zuverlässigsten bewerkstelligen
en. Daß aber dieß und mehreres ei-
Feldmesser unentbehrlich ist, zumal,
nn er Messungen von Wichtigkeit an-
ellen hat, bedarf keiner weitläuftigen
rterung.

Das

Das oben erwähnte Marinonisc
Werk, ist die einzige Anleitung zur Fel
meßkunst, die ich kenne, worin die Leh
von den Folgen der Fehler in den M
sungen etwas vollständig abgehandelt i
Indessen verdient sein synthetischer Vo
trag kürzer und faßlicher gemacht zu w
den; Herr Prof. Lambert hat die Th
rie davon in seinen Beyträgen zu
praktischen Geometrie analyti
auseinander gesetzt; anderer einzelner A
handlungen zu geschweigen; übrigens v
dient die Theorie der Fehler, in den syster
tischen Anleitungen zur Feldmeßkunst, all
dings ihre Stelle.

Meines Erachtens ist der kein grün
licher Feldmesser, der nicht zugleich
Richtigkeit seiner Messungen zu beurth
len weiß, und einen ohngefähren Ueb
schlag machen kann, unter welchen U
ständen er mehr oder weniger vorsich
zu verfahren habe.

Nach der Art, wie ich mir nun die
übende Geometrie vorstelle, wird frey-
) zu einem geschickten Feldmesser etwas
hr Theorie erfordert, als wohl gemei-
lich voraus gesetzt zu werden pflegt. Ich
e, um einige allgemeine Begriffe von
Kenntnissen eines Feldmessers beyzu-
ngen, davon im 12ten §. dieses Buchs
edet. Viele glauben, ein Feldmesser
uche weiter nichts zu wissen, als etwas
chenkunst und Geometrie.

Wie nöthig aber besonders die Leh-
von Decimalbrüchen, Logarithmen,
n der Lage der ebenen Flächen gegen
ander, nebst Trigonometrie, einem Feld-
sser sind, davon wird man an vielen
tellen dieses Buches überzeugt werden;
i ich aber genöthiget bin, diese Lehren
) meinen Lesern vorauszusetzen, und
ne sie verschiedenes nicht ganz verständ-
seyn würde; so rathe ich, daß man

sich

sich solche vorher aus dem Kästnerisch
oder Karstenschen Handbuche bekannt n
che; Ich habe mich zur Abkürzung
Vortrages hin und wieder algebraisc
Formeln, oder vielmehr nur Ausdrück
gen in Buchstaben, bedient. Ich h
aber nicht, daß dieß viele meiner Le
abschrecken wird, da ich nicht für ha
werksmäßige Feldmesser, sondern für sol
denen es um eine sichere und gründli
Praxis zu thun ist, geschrieben habe.

Ich habe nun bey gegenwärtiger A
leitung zur praktischen Feldmeßkunst
Absicht gehabt, das wichtigste, was ein
Feldmesser nützlich ist, auf eine etwas v
ständigere Art, als bisher geschehen
abzuhandeln, und habe daher manc
beygebracht, was sonst eben in kei
Anleitungen zur Feldmeßkunst umständ
vorkömmt, z. E. die Theorie des Vern
der Micrometerschraube, überhaupt al

len Einrichtungen, wodurch geometrische Werkzeuge einen grössern Grad von Vollkommenheit erhalten, und sich von ältern Werkzeugen dieser Art unterscheiden. Eben diese Kenntnisse werden alsdann auch denenjenigen nützlich seyn, die grössere, besonders zum geographischen Landmessen gehörige Werkzeuge, z. E. in den Werken eines *Bouguer*, *Maupertuis*, *Liesganig* u. a. näher kennen lernen wollen. Ich will nun kürzlich zeigen, was in dem ersten Theile dieser praktischen Geometrie abgehandelt wird.

Dieser ist vorzüglich mit Ausmessung gerader Linien und Winkel, sowohl auf dem Papiere, als auf dem Felde, beschäftiget; Es ist klar, daß die Entwerfung ganzer Landschaften hauptsächlich auf diesen Dingen beruht; hat man es hierinnen zu einer Fertigkeit gebracht, so werden sich zusammengesetzte Messungen de-

sto leichter begreiffen und vorstellen lassen. Im ersten bis zum sechsten Kapitel ist von dem Gegenstande der praktischen Geometrie, von Ausmessung gerader und krummer Linien, sowohl auf dem Felde, als auf dem Papiere, von den dazu gehörigen Instrumenten, und nöthigen Vorsichten bey ihrem Gebrauche, geredet. In eben diesen Kapiteln kommen sehr viele andere damit verwandte Untersuchungen vor, die beym Winkelmessen ihren Nutzen haben, und hier ihre Stelle fanden.

Ich hätte die Messung gerader Linien auf dem Papiere wohl, der Ordnung gemäß, vor der Messung auf dem Felde abhandeln müssen; allein da beyde Messungen, auf dem Papiere und dem Felde, nicht auf einander beruhen, so ist es gleichgültig in welcher Ordnung sie vorgetragen sind.

Das VII. Kapitel behandelt verschiedene Werkzeuge zur Winkelmessung auf dem Felde.

Das angegebene Astrolabium ist meines Erachtens so beschaffen, daß man, vermittelst desselben, mit weit mehr Zuverlässigkeit einen Winkel auf dem Felde ausmessen kann, als mit den meisten bisher sogenannten Astrolabiis. Dieses leisten besonders zwey von einander unabhängige Abtheilungen des Randes mit ihrem Vernier, die Micrometerschraube, und die übrigen Vorrichtungen, wodurch dem Werkzeuge ausser den groben Bewegungen auch die nöthigen sanften ertheilet werden, und ich bin versichert, daß, wenn die angegebenen einzelnen Theile dieses Astrolabii, die ausser dem Stative beynahe insgesammt von Messing seyn müssen, von einem Mechanico gut und fleissig gearbeitet sind, das Werkzeug sehr gute Dienste leisten wird.

wird. Verschiedene einzelne Vorrichtungen, die ich hier, um die Menge der Figuren zu ersparen, nicht mitgezeichnet habe, können nach Willkühr von einem geschickten Mechanico selbst angegeben werden, z. E. durch Stellschrauben, die Axe des Gewindes; um die sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, nach Gefallen genau mit der Fläche des Werkzeuges parallel zu stellen, damit das Fernrohr genau in einer auf dem Werkzeuge senkrechten Ebene auf und nieder beweglich sey, u. d. gl.

Ich habe zwar zwey Abtheilungen auf dem Rande angebracht; es erhellet aber, daß man auch die 96 Theilung weglassen könne, wenn etwa die doppelte Abtheilung eines Randes, für ein bloß geometrisches Werkzeug zu viel gesuchte Genauigkeit zu seyn scheinen möchte. Indessen würde ich doch allemal auch die

96 Theilung anrathen, da sie sich auf eine leichte Art, durch eine fortgesetzte Halbirung des Bogens von 30° erhalten läßt, und zur Berichtigung der Gradabtheilungen dienen kann.

Das angegebene Meßtischgen wird alle Bedingungen erfüllen, die von einem solchen geometrischen Werkzeuge verlangt werden.

Ich hielt es nicht für unnütz, auch einige Begriffe von geometrischen Werkzeugen, wo Spiegel angebracht sind, beyzubringen, da heut zu Tage verschiedentlich ähnliche Werkzeuge, von geschickten Künstlern zum geometrischen Gebrauche verfertigt werden.

Im VIII. Kapitel lehre ich die praktische Behandlung der beschriebenen Werkzeuge, und zeige, wie die einzeln Theile derselben, bey wirklicher Ausmessung eines Winkels gebraucht werden.

Uebri-

Uebrigens habe ich gesucht, so viel als möglich, die Bücher anzuführen, aus denen man mehreren Unterricht schöpfen kann, besonders in solchen Fällen, wo Raum und Absicht mir nicht verstatteten, weitläuftiger zu seyn.

Was an der Ordnung der vorgetragenen Sätze, an einigen Stellen wohl zu tadeln seyn möchte, läßt sich damit entschuldigen, daß ich Leser zum voraussetze, die Theorie genug haben, um auch Lehren ausser dem Zusammenhange zu verstehen, und überhaupt sind bey praktischen Wissenschaften kleine Fehler in der oft willkührlichen Ordnung nicht von solcher Erheblichkeit als in den theoretischen Theilen der Mathematik. So habe ich z. E. die Beschreibung des Astrolabii, als eines etwas zusammengesetztern Werkzeugs, eher gegeben, als die des Meßtischgens. Dies geschah aber theils des

nähern Zusammenhangs halber mit den vorhergehenden Lehren, als auch, weil verschiedene Vorrichtungen an dem Meßtische, mit einigen an dem Astrolabio, Aehnlichkeit haben, und mir folglich dieses verstattete, bey der Beschreibung des Meßtisches kürzer zu seyn.

Dies ist es, was ich überhaupt bey dem ersten Theile dieses Werks zu erinnern hatte. Den zweyten Theil hoffe ich, wenn es meine übrigen Geschäfte erlauben, sobald als möglich, nachfolgen zu lassen. Ich werde darinnen sowohl einige Prüfungen der Werkzeuge, als auch selbst noch verschiedene andere Vorrichtungen beschreiben, die beym Feldmessen nützlich sind, alsdann zu Anwendungen sowohl auf einfache als zusammengesetzte Operationen fortgehen, und überall die vorzüglichsten Hülfsmittel, Vorsichten und Kunstgriffe beybringen, welche zu einer

sichern Ausübung von diesen oder jenen Schriftstellern gelehrt worden sind, und ich durch eigene Erfahrung für tauglich befunden habe.

Ueberhaupt wird diese ganze Anleitung zur praktischen Geometrie, etwa drey bis vier Theile jeder ohngefähr von gegenwärtiger Größe, stark werden.

Die wichtigsten Druckfehler habe ich sorgfältig gesammelt, und sie am Ende des Buchs beygefügt.

Göttingen, den 29. Sept. 1777.

Joh. Tob. Mayer.

Vor-

Vorbericht
zur zweyten Auflage.

Bey dieser Auflage ist die Einrichtung des Buches im Ganzen unverändert geblieben, weil ich keine Veranlassung fand, mit der Ordnung unzufrieden zu seyn, in der ich die einzelnen Materien behandelt hatte. Daß aber nicht nur an dem Vortrage manches geändert worden, sondern auch mehrere neue und beträchtliche Zusätze hinzugekommen sind, (ohne daß jedoch die Ordnung der Paragraphen dadurch verrückt worden ist), wird man bey der Ver-

 glei-

gleichung dieser Ausgabe mit der erstern, leicht bemerken. Die folgenden Theile werden noch mehr Zusätze erhalten. Hier will ich nur einige von denen im gegenwärtigen Theile bemerken.

Zu §. 14. ist einiges von den Vorschlägen zu einem allgemeinen Längenmaaße erörtert worden.

Zum 29. §, ein Verzeichniß von den Verhältnissen der vorzüglichsten Meilenmaaße, welches mir in verschiedener Rücksicht für Feldmesser brauchbar schien.

Dem 50. §. sind mehrere kleinere Zusätze beygefügt. Im 51. §. noch einiges von den Versuchen, Weiten, durch den Schall zu bestimmen. Im 81. §. hat der Proportionalzirkel noch einige Zusätze bekommen. § 89. XV. Erwähnung noch verschiedener Eintheilungs-Methoden.

Zum 103. §. Eine Art, die Eintheilung eines Randes in Grade zu ersparen; ferner Hrn. Fischers Micrometer, und ein Verfahren die Angaben für das Maaß eines Winkels noch mehr zu vervielfältigen.

§. 117. u. 118. Verschiedenes die Magnetnadeln, das Ziehen der Mittagslinie, und die auf der Erde gemessenen Grade betreffendes.

§. 126. u. 127. Noch Nachrichten von mehreren winkelmessenden Werkzeugen.

Mehrere litterärische Nachrichten und Bücher zur weitern Ausführung der vorgetragenen Materien, sind überall angeführt. Einzelne kleine Verbesserungen erwähne ich gar nicht. Daß gegenwärtige Ausgabe auch in Ansehung des Druckes Vorzüge vor der erstern habe, wird man leicht bemerken. Die Revision habe ich, da das Buch hier in Erlangen in der

Hilpertischen Buchdruckerey gedruckt worden ist, selbst besorgen können, und stehe also dafür, daß Druckfehler von Erheblichkeit vermieden sind. Die Kupfertafeln haben hin und wieder wegen der neuen Zusätze noch einige Figuren bekommen, sie sind mit einem * bezeichnet, und haben die Zahl derjenigen Figur erhalten, neben welche sie zunächst gezeichnet worden. Der zweyte Theil dieser neuen Ausgabe, wird in der Michaelismesse nachfolgen.

Erlangen, im April 1792.

Joh. Tob. Mayer.

Vor-

Vorbericht

zur dritten Auflage dieses ersten Theils.

Diese Auflage mit vielen neuen Zusätzen zu vermehren, habe ich eben nicht nöthig gefunden, da die in dem Buche behandelten Gegenstände meines Erachtens vollständig genug vorgetragen sind. Ich habe mich also begnügt, nur hin und wieder noch einige kleine Bemerkungen einzuschalten. Z. B. §. 14. Etwas von dem neuen Maaßsystem in Frankreich. §. 31. Eine von Hrn. **Bugge** empfohlene Verbesserung der Absteckstäbe, und §. 85. 16. Etwas über die Collimationsfehler beym Abstecken gerader Linien. §. 89. X. noch ein Vortheil

der

dessen man sich bey der Abtheilung eines Winkelmessers bedienen kann. §. 109. Nachricht von dem Meßtische des Hrn. Bugge. §. 111. 10. Eine Bemerkung über die Diopterliniale, deren Dioptern auf der Mitte des Linials angebracht sind. §. 138. Noch einige Vorsichten beym Gebrauch der Boussole, und am Ende des Buchs noch eine Bemerkung zu §. 69. IX., über das Abtheilen der geraden Linien und Kreisbogen. Ausserdem ist hin und wieder der Vortrag abgekürzt worden, um desto mehr Raum zu litterärischen Notizen zu gewinnen, die man an den gehörigen Orten selbst finden wird. Druckfehler von Erheblichkeit sind möglichst vermieden worden.

Göttingen im März 1802.

Joh. Tob. Mayer.

Vorbericht
zur vierten Auflage.

Ich habe auch dieser vierten Auflage des ersten Theils dieser practischen Geometrie mehrere Zusätze, Bemerkungen und litterärische Notizen, welche mir hie und da erforderlich schienen, hinzugefügt, und werde auch bey der neuen Auflage der folgenden Theile dieses Werkes mich bemühen demselben immer mehr Vollständigkeit zu geben. Freylich hätte ich mich durch die Erinnerungen eines Recensenten in der Jenaischen Allg. Litteraturzeitung (August 1813. S. 334.) der bey der Anzeige eines andern Buches, auch meiner practischen Ge-

Geometrie erwähnt, vielleicht können abschrecken lassen, dieser neuen Ausgabe derselben auch nur noch ein Wort hinzuzufügen. Aber ich fand dazu keinen hinlänglichen Grund. Der Recensent hält mein Buch für die meisten Feldmesser und Geometer bey weiten für zu gelehrt. — Das was würklich practisch ist, sey nicht genug gesondert von dem, was blos auf Untersuchungen führe, die Niemand brauche, und eigentlich nur in ein Wörterbuch dieser Wissenschaft gehörten. Dahin rechnet er z. B. die Untersuchungen, was für Fehler im Winkelmessen entstehen, wenn das Werkzeug nicht horizontal steht, die Kippregel sich nicht gut bewegt, und vermuthlich auch wohl die Lehre von den Folgen der Fehler in den Messungen. Das Werk sey zu gelehrt, weil hin wieder algebraische Formeln darin vorkämen, welche sich noch von den Formelnwesen der Kästschen Schule (?!), das damals für

Gelehrsamkeit gegolten habe; herschrieben. Bugges Feldmeßkunst sey lange nicht so vollständig, aber sie sey brauchbarer, weil Hr. Bugge ein practischer Geometer sey, und lange in dieser Parthie selbst gearbeitet habe. Einem Professor, der nicht selbst practischer Geometer sey, fehle der gehörige Tackt in der Beurtheilung des für die Ausübung würklich Brauchbaren und Nützlichen u. d. gl.

Wenn der Hr. Rec. sonst nichts an meiner practischen Geometrie zu tadlen weis, als daß sie nicht von einem Practiker in dem Sinne, in welchem er das Wort zu nehmen scheint, geschrieben sey, und manches darinn vorkomme, was er vielmehr in ein Wörterbuch dieser Wissenschaft hingebracht wissen will, so kann ich mich würklich sehr leicht trösten, um so mehr, da er, mit sich selbst im Widerspruche, doch das Buch auf der andern Seite auch wieder für sehr voll-

stän-

ständig erklärt. Daß er durch seine so große Formelnscheue bewogen worden ist, das Buch für zu gelehrt zu halten, ist eine Aeusserung, wodurch er sich selbst zur Classe der gemeinen Landmesser herabsetzt, für welche ich freylich nicht geschrieben habe. Aber von einem Geometer, der sich nur über das Mittelmäßige erheben will, kann man doch mit Recht verlangen, daß ihm Formeln, dergleichen in meinem Buche vorkommen, nicht abschreckend seyn dürfen, und hält er einige Untersuchungen für zu gelehrt, oder auch gar für überflüssig, so hindert ja auch ihn nichts, sie zu überschlagen, und sich an das eigentlich Practische (nach der Idee die er mit diesem Worte verbindet) zu halten, es kommen Fälle vor, wo er sie dennoch mit Nutzen gebrauchen kann. Es ist ein ganz falscher Begriff, den man vom Practischen hat, wenn man glaubt, in einem practischen Werke, dürften keine Formeln vorkommen,

Alles

Alles müsse nur in Worten ausgedrückt werden. Daß in meiner practischen Geometrie gewiß wenig vermist wird, was zu einer gründlichen Ausübung dieser Wissenschaft erforderlich ist, haben unpartheyische sachkundige Männer schon lange zugestanden, sie könnte so gar noch gelehrtere und tiefere Untersuchungen enthalten, wenn es mein Zweck gewesen wäre, auch von Gradmessungen, und mehr andern Dingen, welche man in De Lambre's und Puissants Werken findet, zu handeln. Ja es kann seyn, daß ich mich nach dem Wunsche einiger Freunde entschließe, auch bey der neuen Ausgabe des dritten Theils, dennoch Einiges hieher gehörige nachzutragen, ohne daß ich befürchte, daß mein Buch deswegen für minder practisch, gehalten werden dürfte, wenn anders dies Wort nicht bloß auf die gemeinen Feldmesserarbeiten bezogen werden soll. Daß in einem vollständigen Werke über diese Wissenschaft nicht

alle Untersuchungen gleich brauchbar seyn können, ist natürlich, aber dürfen sie deswegen fehlen, und muß denn alles so blos auf das engste und nächste Bedürfniß des Practikers berechnet seyn? Wenn der Hr. R. zum Beyspiel die Untersuchungen über die Fehler, welche beym Winkelmessen entstehn, wenn das Werkzeug nicht horizontal steht, für unnütz erklärt, weiß er denn nicht, daß sie bey allen winkelmessenden Werkzeugen, denen eine Kippregel fehlt, z. B. Sextanten, Spiegelkreisen u. dgl. erforderlich sind, um die schief gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren? Wenn Feldmesser von der Theorie der Fehler nichts wissen, wenn sie jede trigonometrische Formel für unnütze Gelehrsamkeit halten sollen, was können aus einer solchen Schule für practische Geometer hervorgehn. Es ist freylich wahr, daß vielleicht einige Untersuchungen in meinem Buche wegfallen könnten, wenn jedem Geometer so kostbare und

voll-

vollkommene Werkzeuge zu Gebothe stän-
den, als sie jetzt von einem Reichenbach,
und einigen andern Künstlern verfertigt
werden. Da aber dies nicht der Fall ist,
und doch auch mit minder kostbaren Werk-
zeugen oft sehr nützliche und brauchbare Mes-
sungen angestellt werden können, wenn der
practische Geometer die Fehler solcher Werk-
zeuge zu beurtheilen und zu untersuchen
weiß, so werden auch solche Untersuchun-
gen, die doch immer nur einen geringen
Theil meiner practischen Geometrie ausma-
chen, und in einzelnen Kapiteln, getrennt
von dem, was eigentlich practisch
(nach dem Sinne des Hrn. R.) ist, ab-
gehandelt sind, nicht ganz überflüssig seyn.
Sie dürfen einmahl nicht fehlen in einem
Buche, das vollständig seyn soll. Wenn der
Hr. Rec. Bugges Feldmeßkunst für brauch-
barer hält, als die Meinige, so habe
ich nichts dagegen. Aber jeder der dies
Buch des Hrn. Bugge besitzt, wird

wissen, daß darinn nur die gewöhnlichen Operationen mit dem Meßtische vorkommen, und weder von Astrolabien oder Theodoliten, noch von Sextanten und Spiegelkreisen, noch von Tobias Mayers Methode Winkel durch Repetition zu messen, und viel anderen Gegenständen, deren Kenntniß für die feinere Praxis höchst wichtig ist, geredet wird. Meint der Hr. R. nicht diese Feldmeßkunst des Hrn. Bugge sondern diejenige Schrift desselben, worin er die bey den Dänischen geographischen Charten angewandte Ausmessungsmethode erklärt, so wird zwar darin auch der Gebrauch des Theodoliten gelehrt, aber schwerlich wird der Theodolit, welcher darin beschrieben ist, auf den hohen Thurmspizzen gebraucht werden können, von denen der Hr. R. so viel Wesens macht, daß er meint sie seyen der Classische Boden des Trigonometers, und hier könne man erst sehen ob ein Geometer vom Leder oder von der Fe-

Vorbericht

zur dritten Auflage dieses ersten Theils.

Diese Auflage mit vielen neuen Zusätzen zu vermehren, habe ich eben nicht nöthig gefunden, da die in dem Buche behandelten Gegenstände meines Erachtens vollständig genug vorgetragen sind. Ich habe mich also begnügt, nur hin und wieder noch einige kleine Bemerkungen einzuschalten. Z. B. §. 14. Etwas von dem neuen Maaßsystem in Frankreich. §. 31. Eine von Hrn. Bugge empfohlene Verbesserung der Absteckstäbe, und §. 85. 16. Etwas über die Collimationsfehler beym Abstecken gerader Linien. §. 89. X. noch ein Vortheil des-

dessen man sich bey der Abtheilung eines Winkelmessers bedienen kann. §. 109. Nachricht von dem Meßtische des Hrn. Bugge. §. 111. 10. Eine Bemerkung über die Diopterliniale, deren Dioptern auf der Mitte des Linials angebracht sind. §. 138. Noch einige Vorsichten beym Gebrauch der Boussole, und am Ende des Buchs noch eine Bemerkung zu §. 69. IX. über das Abtheilen der geraden Linien und Kreisbogen. Ausserdem ist hin und wieder der Vortrag abgekürzt worden, um desto mehr Raum zu litterärischen Notizen zu gewinnen, die man an den gehörigen Orten selbst finden wird. Druckfehler von Erheblichkeit sind möglichst vermieden worden.

Göttingen im März 1802.

Joh. Tob. Mayer.

Vor-

Vorbericht
zur vierten Auflage.

Ich habe auch dieser vierten Auflage des
rsten Theils dieser practischen Geometrie
nehrere Zusätze, Bemerkungen und litte-
ärische Notizen, welche mir hie und
a erforderlich schienen, hinzugefügt, und
verde auch bey der neuen Auflage der fol-
enden Theile dieses Werkes mich bemü-
en demselben immer mehr Vollständigkeit
u geben. Freylich hätte ich mich durch
ie Erinnerungen eines Recensenten in der
jenaischen Allg. Litteraturzeitung (August
813. S. 334.) der bey der Anzeige eines
ndern Buches, auch meiner practischen

Geo-

Viertes Kapitel.

Fünf-

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Thei=

alle Untersuchungen gleich brauchbar seyn können, ist natürlich, aber dürfen sie deswegen fehlen, und muß denn alles so blos auf das engste und nächste Bedürfniß des Practikers berechnet seyn? Wenn der Hr. R. zum Beyspiel die Untersuchungen über die Fehler, welche beym Winkelmessen entstehn, wenn das Werkzeug nicht horizontal steht, für unnütz erklärt, weiß er denn nicht, daß sie bey allen winkelmessenden Werkzeugen, denen eine Kippregel fehlt, z. B. Sextanten, Spiegelkreisen u. dgl. erforderlich sind, um die schief gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren? Wenn Feldmesser von der Theorie der Fehler nichts wissen, wenn sie jede trigonometrische Formel für unnütze Gelehrsamkeit halten sollen, was können aus einer solchen Schule für practische Geometer hervorgehn. Es ist freylich wahr, daß vielleicht einige Untersuchungen in meinem Buche wegfallen könnten, wenn jedem Geometer so kostbare und voll-

vollkommene Werkzeuge zu Gebothe stän-
den, als sie jetzt von einem Reichenbach,
und einigen andern Künstlern verfertigt
werden. Da aber dies nicht der Fall ist,
und doch auch mit minder kostbaren Werk-
zeugen oft sehr nützliche und brauchbare Mes-
sungen angestellt werden können, wenn der
practische Geometer die Fehler solcher Werk-
zeuge zu beurtheilen und zu untersuchen
weiß, so werden auch solche Untersuchun-
gen, die doch immer nur einen geringen
Theil meiner practischen Geometrie ausma-
chen, und in einzelnen Kapiteln, getrennt
von dem, was eigentlich practisch
(nach dem Sinne des Hrn. R.) ist, ab-
gehandelt sind, nicht ganz überflüssig seyn.
Sie dürfen einmahl nicht fehlen in einem
Buche, das vollständig seyn soll. Wenn der
Hr. Rec. Bugges Feldmeßkunst für brauch-
barer hält, als die Meinige, so habe
ich nichts dagegen. Aber jeder der dies
Buch des Hrn. Bugge besitzt, wird

wis-

wissen, daß darinn nur die gewöhnlichen Operationen mit dem Meßtische vorkommen, und weder von Astrolabien oder Theodoliten, noch von Sextanten und Spiegelkreisen, noch von Tobias Mayers Methode Winkel durch Repetition zu messen, und viel anderen Gegenständen, deren Kenntniß für die feinere Praxis höchst wichtig ist, geredet wird. Meint der Hr. R. nicht diese Feldmeßkunst des Hrn. Bugge sondern diejenige Schrift desselben, worin er die bey den Dänischen geographischen Charten angewandte Ausmessungsmethode erklärt, so wird zwar darin auch der Gebrauch des Theodoliten gelehrt, aber schwerlich wird der Theodolit, welcher darin beschrieben ist, auf den hohen Thurmspizzen gebraucht werden können, von denen der Hr. R. so viel Wesens macht, daß er meint sie seyen der Classische Boden des Trigonometers, und hier könne man erst sehen ob Geometer vom Leder oder von der Feder

der sey, ob er es verstehe eine brauchbare Auswahl von Instrumenten für so schwürige Fälle zu treffen u. dergl. Spricht er nicht durch diese Aeusserungen Hrn. Bugge zugleich wieder das Verdienst ab, der große Practiker zu seyn, für den er ihn zuvor erklärte. Daß übrigens nur Jemand, der selbst ein Practiker ist, eine gute practische Geometrie schreiben könne, will ich dem Hrn. R. gern zugestehen, aber es ist nicht nöthig, daß er, wie Hr. Bugge, gerade selbst eine große Landesvermessung unternommen habe. Wer sich eine hinlängliche Fertigkeit in der Behandlung der Instrumente erworben hat, und die gehörigen theoretischen Kenntnisse besitzt, wird sich bey einiger Gegenwart des Geistes, leicht aus allen schwürigen Fällen zu helfen wissen, welche in der Ausübung vorkommen können. Tobias Mayer war einer der größten practischen Astronomen, und würde gewiß als ein eben so großer

practischer Geometer einer jeden großen Landesvermessung Ehre gemacht haben, ohngeachtet er nie berühmte Sternwarten besucht, und große Landesvermessungen unternommen hat. Ich darf mir schmeicheln, daß in meinem Buche, alle schwürige Fälle erörtert sind, welche einem Practiker nur irgend vorkommen können, wenn ich gleich nicht auf die Ehre eines solchen Practikers, als der Hr. R. sich zu seyn dünkt Anspruch machen will. Wer in meinem Buche manches zu gelehrt findet, mag sehen, wie er sich mit Penthers practischer Geometrie, und ähnlichen Werken, wenn sie gleich öfters unter einem sehr prunkvollen Titel, feil geboten werden, aus der Noth hilft.

Göttingen, im Sept. 1814.

Joh. Tob. Mayer.

Inhalt
dieses ersten Theils.

Inhalt
der trigonometrischen und andern Lehrsätze.

Inhalt

des ersten Kapitels.

Ursachen

Zweytes Kapitel.

Drittes Kapitel.

Mes-

Viertes Kapitel.

Fünf=

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Thei-

Siebentes Kapitel.

Die

Achtes Kapitel.

Gewöhn=

Neuntes Kapitel.

Einige Trigonometrische und andere Sätze, die in Rechnungen häufig gebraucht werden.

1. Alle trigonometrische Linien, als Sinus, Tangenten, Secanten, u. s. w. sind in den gewöhnlichen Sinustafeln in Form ganzer Zahlen für den Halbdurchmesser oder Sinus totus = 10000000 zu finden. Es ist aber bey vielen Rechnungen vortheilhaft, den Sinus totus = 1 zu setzen *). Alsdann verwandeln sich jene Sinusse und Cosinusse sämtlich in Decimal-Brüche. Will man nun diese trigonometrischen Linien für den Sinus totus = 1 finden, so darf man nur diejenigen, die in den Tafeln angegeben sind, mit 10000000 dividiren, d. h. von der rechten Hand gegen die linke 7 Decimalstellen von denselben ab-

*) In Vega's Logarithmischen, Trigonometrischen und andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln, Wien 1783. finden sich Tafel VI. die trigonometrischen Linien schon für den Sin. tot. = 1 angegeben.

abschneiden. Z. E. in den Tafeln ist für den Sin. tot. = 10000000, der Sinus von 28° = 4694716; der Sinus von 28° für den Sinus tot. = 1 würde also folgende Zahl 0,4694716 seyn.

Der Logarithme von 10000000 ist 7. Also müste in den Tafeln für log Sin. tot die Zahl 7 stehen. Daß man aber 10 statt log Sin tot findet, rührt daher, daß man bey Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Linien nicht obigen Halbmesser 10000000, sondern vielmehr einen Halbmesser = 10000000000 zum Grunde gelegt hat, für welchen sich nun auch z. B. in Sherwins und mehr andern größern Tafeln die trigonometrischen Linien angegeben finden.

II. Da folglich in den Tafeln der Logarithme des Sinus totus = 10 gesetzt wird, so erhellet aus (I), daß man von dem Tabellen-Logarithmen einer gewissen trigonometrischen Linie nur die Zahl 10 abziehen dürfe, um den Logarithmen dieser trigonom. Linie für den Sinus totus = 1 zu erhalten. Z. E. in den Tafeln ist log sin 28° = 9, 6716093; also wäre log sin 28° = 9, 6716093 — 10 = — 0, 3283907, wenn der Sin. tot = 1 angenommen würde.

Gewöhnlich zieht man aber die 10 nicht würklich ab, sondern setzt sie nur mit dem negativen Zeichen hinter den Tabellarlogarithmen, oder

oder man schreibt auch in dem gegebenen Beyspiele 0, 6716093 — 1.

Umgekehrt, hat man den Log. einer trigonometrischen Linie für den Sin tot = 1, so addirt man 10 hinzu, um den Logarithmen derselben für den Sin tot. der Tafeln zu bekommen.

III. Wenn der Halbmesser eines Kreises = 1 ist, so ist bekanntermaaßen die halbe Peripherie = 3, 141592 .... und der Logarithme dieser Zahl = 0, 4971498.

IV. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, ein gewisser Bogen in Theilen des Halbmessers gegeben ist, so kann man die Anzahl von Secunden finden, die dieser Bogen hält, wenn man ihn mit der Zahl 206264 multipliciret.

Denn die halbe Peripherie eines Kreises hält 180.60.60 oder 648000 Secunden. Wenn man nun den gegebenen Bogen in Theilen des Halbmessers = a, und die diesem Bogen zugehörige Anzahl von Secunden = x nennt, so schließt man nach der Regel de Tri

$$3,141592 : a = 648000'' : x''$$

also $x = \frac{648000}{3,141592} . a$; Dividirt man nun 648000 würklich mit 3, 141592, so kömmt 206264 zum Quotienten, und es ist daher

$$x = 206264 . a$$

V. Auch ist log 206264 = log 648000 — log 3, 141592 = 5, 8115750 — 0, 4971498 (III) = 5, 3144252 folglich log x = 5, 3144252 + log a

Ex. Wie viel Secunden hält ein Bogen der = 0, 3246 des Halbmessers ist. Also ist hier a = 0, 3246 Mithin

$$\begin{array}{ll} \log a = & 3,5113485-4 \\ \text{addirt} & 5,3144252 \\ \hline \log x = & 4,8257737 \text{ Daher} \end{array}$$

$$x = 66954,3 \text{ Sec.} = 18^\circ\ 35'\ 53'',3$$

VI. Eben diese gefundenen 18° 35′ 53″, 3 würden auch das Maaß des Winkels seyn, der dem Bogen a am Mittelpunkte des Kreises zugehörte.

VII. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, α einen sehr kleinen Bogen, z. E. nur von einigen wenigen Minuten bedeutet, so kann man so wohl den Sinus, als auch die Tangente dieses kleinen Bogens, ohne merklichen Irrthum diesem kleinen Bogen selbst gleich setzen, oder es ist alsdann

$$\sin \alpha = \alpha$$
$$\tan \alpha = \alpha$$

das will sagen, so viel Theilchen des Halbmessers 1, auf den Sinus oder die Tangente dieses Bogens gehen, eben so viel dergleichen Theil-

Theilchen, wird auch ohne merklichen Fehler der Bogen selbst halten.

In Secunden wäre aber dieser Bogen = 206264 α nach IV.

VIII. Es ist bekanntermaaßen $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$; Nimmt man nun für x einen sehr kleinen Bruch an, so ist x^2 in Vergleichung mit $1 + 2x$ als unendlich gering anzusehen, und man kann daher in solchem Falle blos setzen $(1 + x)^2 = 1 + 2x$.

Man setze $2x = m$ also $x = \frac{1}{2}m$ so ist $(1 + \frac{1}{2}m)^2 = 1 + m$

Daher $\sqrt{(1 + m)} = 1 + \frac{1}{2}m$

Wenn also m einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so ist ohne merklichen Fehler

$$\sqrt{(1 + m)} = 1 + \tfrac{1}{2}m$$

IX. Ist m negativ, so wird

$$\sqrt{(1 - m)} = 1 - \tfrac{1}{2}m$$

Anmerk. Völlig genau läßt sich $\sqrt{(1 + m)}$, was auch m ist, durch eine unendliche Reihe ausdrücken und es ist

$$\sqrt{(1+m)} = 1 + \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{8}m^2 + \tfrac{1}{16}m^3 - \tfrac{5}{128}m^4 \text{ etc.}$$

Man s. Kästners Anal. d. Unendl. im 50 §. der neuesten Ausgabe 1799.

X. Da $\cos \alpha = \sqrt{(1 - \sin \alpha^2)}$ ist, wenn man den Sinus totus $= 1$ setzet, so wird unter der Voraussetzung, daß α sehr klein ist, $\sin \alpha = \alpha$ (VII) Mithin

$$\cos \alpha = \sqrt{(1 - \alpha^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ (IX)}$$

XI. Einfache trigonometrische Formeln.

Wenn man sin tot $= 1$ setzet, und β einen gewissen Winkel oder Bogen bedeutet, so ist bekanntermaaßen

1) $\sin \beta^2 = 1 - \cos \beta^2$; oder $\sin \beta = \sqrt{(1 - \cos \beta^2)}$

2) $\cos \beta = \sqrt{(1 - \sin \beta^2)}$

3) $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$

4) $\cot \beta = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$

5) $\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{(1 + \tan \beta^2)}$

6) $\operatorname{cosec} \beta = \frac{1}{\sin \beta} = \sqrt{(1 + \cot \beta^2)}$

XII. Zusammengesetzte trigonometrische Formeln.

1) $\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$

2) $\sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta$

3) $\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma$

4) $\cos(\beta-\gamma) = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma$

5) $\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \tan\gamma}$

6) $\tan(\beta-\gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta \tan\gamma}$

Diese Sätze findet man z. E. in Hr. H. Kästners Trigonometrie 19 Satz u. s. f.

Es folgen aber aus diesen 6 sehr fruchtbaren Lehrsätzen noch sehr viel andere, die insgesamt von häufiger Anwendung sind, und einem Geometer zur Erfindung neuer Wahrheiten, und zur Erweiterung seiner Wissenschaft dienen. Wir wollen aus den angeführten 6 Formeln noch folgende herleiten.

XIII. Wenn man in XII, die Formeln (1. 2) zusammen addirt oder sie von einander abziehet, so wird

7) $\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) = 2 \sin\beta \cos\gamma$

8) $\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma) = 2 \sin\gamma \cos\beta$

Eben dieses mit den Formeln 3, 4, vorgenommen, giebt

9) $\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2 \cos\beta \cos\gamma$

10) $\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 2 \sin\beta \sin\gamma$

Wenn

Wenn man $\beta + \gamma = \varphi$; $\beta - \gamma = \psi$, mithin $\beta = \frac{\varphi + \psi}{2}$; $\gamma = \frac{\varphi - \psi}{2}$ setzt, so verwandeln sich die Formeln 7, 8, 9, 10, in folgende:

$$11)\ \sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$12)\ \sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$13)\ \cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$14)\ \cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Aus 11, 12 wird

$$15)\ \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}$$

$$= \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cot\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Aus 13, 14, wird eben so

$$16)\ \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\cos\psi + \cos\varphi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Und wenn man in 11, 12, statt ψ setzet $90^\circ - \psi$, so wird

17)

17) $\sin\varphi + \cos\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi - \psi + 90}{2}\right)$
$\cos\left(\frac{\varphi + \psi - 90^\circ}{2}\right)$

18) $\sin\varphi - \cos\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi - \psi + 90^\circ}{2}\right).$
$\sin\left(\frac{\varphi + \psi - 90^\circ}{2}\right)$

Aus 11. 13. wird,

19) $\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \tang\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) =$
$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi}$ (12. 14.)

Aus 12. 13. erhält man

20) $\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \tang\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

(Aus 1. 2) wird, $\gamma = \beta$ gesetzt,

21) $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

22) $\cos 2\beta = \cos\beta^2 - \sin\beta^2 = 2\cos\beta^2$
$- 1 = 1 - 2\sin\beta^2$

Aus (22) wird, wenn man statt 2β den Buchstaben φ setzt,

$\cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - 1$. Mithin $1 + \cos\varphi$
$= 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$ und

$$23)\ \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$$

Eben so wird aus (22) wegen $\cos\varphi = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$

$$24)\ \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)}$$

Und wenn man in 23, 24 statt φ setzt $90° - \varphi$, so wird

$$25)\ \cos.(45° - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin\varphi}{2}\right)}$$

$$26)\ \sin(45° - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\varphi}{2}\right)}$$

Aus (20) wird, $\psi = 0$ gesetzt,

$$27)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ aus (19)}$$

$$28)\ \cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

Endlich wird aus (19. 20) wenn man $90° - \psi$ statt ψ setzt

$$29)\ \frac{\sin\varphi+\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi-\psi+90°}{2}\right)$$

$$30)\ \frac{\sin\varphi-\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi+\psi-90°}{2}\right)$$

XIV.

XIV. Dies sind zwar nicht alle, doch beyweiten die brauchbarsten trigonometrischen Formeln. Wenn es nöthig ist, so läßt sich aus ihnen noch eine große Menge anderer herleiten, die zwar nicht alle gleich brauchbar sind, von denen es aber gut ist, eine vollständige Samlung zu haben.

Nur muß man in einer solchen Samlung eine gewisse Ordnung halten, um jede Formel bequem aufsuchen zu können. In dem Falle ist es gut, die Formeln nach gewissen Gestalten zu ordnen, da eine große Menge derselben einige Aehnlichkeit in Absicht ihres Ausdrucks untereinander haben. Ich habe mir eine solche Samlung verfertiget, die ziemlich vollständig ist, und mir wegen ihrer Einrichtung das Aufsuchen sehr erleichtert.

XV. Ohnerachtet ich die gewöhnliche trigonometrische Auflösung der Dreyecke, bey meinen Lesern voraussetzen darf, so können doch Fälle vorkommen, wo analytische Auflösungen theils brauchbarer theils bequemer sind. Ich gebe hier ein paar Formeln an, vermittelst deren man aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder aus drey Seiten eines Dreyecks, sehr leicht die übrigen unbekannten Stücke desselben berechnen kann. Vorher muß ich aber folgendes beybringen.

XVI. 1. Wenn B und A ein paar Zahlen sind, und $A < B$ ist, so läßt sich $\sqrt{(B^2 - A^2)}$ durch die Sinustafeln berechnen, denn es ist

$$\sqrt{(B^2 - A^2)} = B\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)},$$

Da nun $A < B$ mithin $\frac{A^2}{B^2} < 1$ ist, so läßt sich, wenn die 1 den Sinus totus bedeutet, der Bruch $\frac{A}{B}$ allemahl als ein Sinus eines gewissen Winkels betrachten, den ich ψ nennen will. Man suche also einen Winkel ψ dessen Sinus $= \frac{A}{B}$ ist, so wird

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)} = \sqrt{(1 - \sin\psi^2)} = \cos\psi$$

Mithin

$$\sqrt{(B^2 - A^2)} = B\cos\psi$$

wo man sowohl $\sin\psi = \frac{A}{B}$ als auch $B\cos\psi$ durch Logarithmen berechnen kann.

2. Eben so läßt sich auch $\sqrt{(B^2 + A^2)}$ durch die Sinustafeln finden. Denn es ist

$$\sqrt{(B^2 + A^2)} = B\sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)}$$

Hier

Hier suche man also einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{A}{B}$ ist, oder man setze $\tan \psi = \frac{A}{B}$

so wird $\sec \psi = \sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)}$

Mithin $\sqrt{(B^2 + A^2)} = B \sec \psi$

Dieses zum vorausgesetzt so seyen

XVII. In dem Dreyecke DAF fig. XXIII. die Seiten AD = a, AF = b, der eingeschlossene Winkel DAF $= \varphi$

Man soll die dritte Seite DF = c finden.

Aufl. Man fälle von D auf AF die Perpendiculär-Linie DC herab, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC, wenn man sin tot = 1 setzt,

$$AD : DC = 1 : \sin \varphi$$

$$AD : AC = 1 : \cos \varphi$$

Mithin $DC = AD \sin \varphi = a \sin \varphi$; $AC = a \cos \varphi$ Folglich $CF = AF - AC = b - a \cos \varphi$, daher in dem rechtwinklichten Dreyecke DCF; $DF^2 = DC^2 + CF^2$ oder

$$c^2 = a^2 \sin \varphi^2 + (b - a \cos \varphi)^2 =$$
$$a^2 (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2) + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

aber $\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 = 1$ (XI. 1) folglich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

XVIII.

XVIII. Diese Formel bestimmt aus den gegebenen Stücken a, b, φ, das Quadrat der dritten Seite c; um aber bey der Berechnung von c die Ausziehung der Quadratwurzel zu ersparen, so kann man folgende Einrichtung gebrauchen.

Es ist auch $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos\varphi$ oder

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\,(1 + \cos\varphi)$$

aber $1 + \cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$, (XIII. 23) daher

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$c = \sqrt{((a+b)^2 - 4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2)}$$

diese Formel läßt sich nun mit der (XVI. 1) vergleichen, wenn das dortige B^2 hier $(a+b)^2$; und A^2 hier $4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$ bedeutet.

Mithin hat man $B = a + b$; $A = \sqrt{4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}$ $= 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}$. Man suche also einen Winkel $= \psi$ dessen Sinus $= \frac{A}{B}$ oder hier $= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}}{a+b}$ ist, so wird $c = B\cos\psi = (a+b)\cos\psi$

Will man alles durch Logarithmen rechnen, so wird erstlich

$$\log\sin\psi = \log 2 + \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) - \log(a+b)$$

und dann

$$\log c = \log(a+b) + \log\cos\psi$$

Ex.

Ex. Es sey $a = 100$; $b = 87$, $\varphi = 30^\circ\, 18'$ so wird

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 9,9846375 - 10 \text{ (nach II)}$$
$$\tfrac{1}{2}(\log a + \log b) = 1,9697596$$
$$12,2554271 - 10$$
$$\text{abgez.} \log (a+b) = 2,2718416$$
$$\text{giebt} \log \sin \psi = 9,9835855 - 10$$

folglich weil hier $9,9835855 - 10$ der Logarithme des Sinus vom Winkel ψ ist, wenn $\sin tot = 1$ gesetzt wird, so ist nach (I) $9,9835855$ der Logarithme von $\sin \psi$ für den $\sin tot = 10000000000$ (I).

Wenn man also in den Sinustafeln den nur genannten Logarithmen $9,9835855$ aufsuchet, so findet man dabey den Winkel $\psi = 74^\circ . 20'$. + Also

$$\log \cos \psi = 9,4314286 - 10$$
$$\log (a + b) = 2,2718416$$
$$\log c = 1,7032702$$
$$\text{daher } c = 16,49$$

Ich habe in diesem Exempel die Secunden in dem Winkel ψ weggelassen. Wollte man sie aber auch mitnehmen, so hätte man sich der gewöhnlichen Proportionaltheile bedienen müssen.

XIX. Es würden aber alsdann zwey Proportionen nöthig seyn, wenn man für die Secunden in dem Winkel ψ, den Logarithmen von $\cos \psi$ finden wollte. Nemlich 1) würde man vermittelst der Proportionaltheile die Secunden in dem Winkel ψ, und dann 2) vermittelst einer zweyten Proportion, für die gefundene Anzahl von Secunden, den log von $\cos \psi$ berechnen. Eigentlich braucht man aber den Winkel ψ nicht selbst, sondern blos dessen Cosinus, wenn man in XVIII die Seite c sucht. Es ist daher, um $\log \cos \psi$ zu finden, nicht nöthig, die Secunden in dem Winkel ψ erst würklich zu berechnen, sondern man kann kürzer so verfahren. Es ist aus den Sinustafeln

M) $\log \sin 74° 20' = 9{,}9835582$

N) $\log \sin \psi = 9{,}9835855$

O) $\log \sin 74° 21' = 9{,}9835936$

Um also die Secunden in dem Winkel ψ zu berechnen, würde man erstlich nach der gewöhnlichen Regel schliessen

$O - M : N - M = 60'' : x''$ da wäre folglich

$$x'' = \frac{N - M}{O - M}\, 60''$$

Nun ist aber ferner

P) $\log \cos 74° 20' = 9{,}4314286$

Q) $\log \cos 74° 21' = 9{,}4309776$

da

da also $\log \cos \psi = \log \cos (74^\circ 20' + x'')$ zwischen P und Q fallen muß, so setze man $\log \cos \psi = P - y$ wo y den Proportionaltheil bedeute, der denen x'' zugehöret. Um also y zu finden schliesse man

$$60'' : x'' = P - Q : y \text{ oder}$$

$$60'' : \frac{N - M}{O - M} . 60'' = P - Q : y$$ da würde also

$$y = \frac{(P - Q)(N - M)}{O - M}$$ Mithin

$$O - M : N - M = P - Q : y$$

Also blos vermittelst dieser einzigen Proportion findet man sogleich den Proportionaltheil y, der in dem Cos ψ denen x'' zugehört, ohne daß es nöthig ist, durch eine besondere Proportion vorher die x'' selbst zu berechnen

Hier ist

$N - M = 0,0000273$

$O - M = 0,0000354$

$P - Q = 0,0004507$

Mithin die Proportion diese

$0,0000354 : 0,0000273 = 0,0004507 : y$

also $y = 0,0003475$

folglich $\log \cos \psi = P - y =$
$9{,}4314286 - 0{,}0003475$

oder

$$\log \cos \psi = 9{,}4310811$$

daß diese Rechnung weit leichter und bequemer ist, als wenn man erst würklich die x'', und dann hieraus den Proportionaltheil y berechnen wollte, wird man leicht einsehen. Ich habe es daher nicht undienlich erachtet, kürzlich diesen Rechnungsvortheil, der sich mit geringer Mühe auf ähnliche Fälle erstrecken läßt, hie beyzubringen.

XX. Aus der Formel XVII, nämlich

$$c^2 = a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2$$

folgt umgekehrt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \varphi$$

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - \cos \varphi \text{ oder}$$

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = 1 - \cos \varphi \text{ und}$$

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \frac{1 - \cos\varphi}{2} = \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2$$

XIII. 24.

Aber $c^2 - (a-b)^2$ ist $= (c+a-b)(c-a+b)$

Es wird also $\sqrt{\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4ab}} = \sin \frac{1}{2}\varphi$

oder durch Logarithmen

$$\tfrac{1}{2}\log(c+a-b) + \tfrac{1}{2}\log(c-a+b) - \tfrac{1}{2}(\log a + \log b + \log 4) = \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

diese Formel dienet, aus drey Seiten eines Dreyecks, oder aus a, b, c, den Winkel φ zu berechnen, der der Seite c gegenüber steht. Man muß aber zu dem Werthe, wodurch man $\log \sin \frac{1}{2}\varphi$ bekömmt, noch 10 hinzu addiren, damit man $\log \sin \frac{1}{2}\varphi$ für den sin tot = 10000000 erhalte (I).

Ex. Es sey $a = 300$; $b = 200$; $c = 210$ so ist

$c+a-b = 310$; $\frac{1}{2}\log(c+a-b) =$ 1,2456808
$c-a+b = 110$; $\frac{1}{2}\log(c-a+b) =$ 1,0206963
addiret 10 = 10,0000000

Summe = 12,2663771

abgezogen $\frac{1}{2}(\log a + \log b + \log 4) = 2{,}6901056$

gibt $\log \sin \frac{1}{2}\varphi = 9{,}5762715$

Und durch Proportionaltheile $\frac{1}{2}\varphi = 22°.8'.39''$

folglich $\varphi = 44°.17'18''$

Es ist gar kein Zweifel, daß diese Rechnung, aus drey Seiten eines Dreyecks einen Winkel zu finden, weit kürzer und bequemer ist, als die gewöhnliche Regel, die in den gemeinen Elementen der Trigonometrie angegeben wird.

Man setze die Summe aller drey Seiten, oder $a + b + c = S$; so ist $c + b - a = S - 2a$ und $c + a - b = S - 2b$, daher auch

$$\sin \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(S-2a)(S-2b)}{4ab}}$$

welche Form noch bequemer als die obige ist.

XXI. Aus XVII ist in dem Dreyecke DCF

$$\frac{CD}{CF} = \operatorname{tang} F = \frac{a \sin \varphi}{b - a \cos \varphi}$$

und folglich

$$\cot F = \frac{1}{\operatorname{tang} F} = \frac{b - a \cos \varphi}{a \sin \varphi} = \frac{b}{a \sin \varphi}$$
$$- \cot \varphi$$

wel-

XIV. Dies sind zwar nicht alle, doch bey-weiten die brauchbarsten trigonometrischen Formeln. Wenn es nöthig ist, so läßt sich aus ihnen noch eine große Menge anderer herleiten, die zwar nicht alle gleich brauchbar sind, von denen es aber gut ist, eine vollständige Samlung zu haben.

Nur muß man in einer solchen Samlung eine gewisse Ordnung halten, um jede Formel bequem aufsuchen zu können. In dem Falle ist es gut, die Formeln nach gewissen Gestalten zu ordnen, da eine große Menge derselben einige Aehnlichkeit in Absicht ihres Ausdrucks untereinander haben. Ich habe mir eine solche Samlung verfertiget, die ziemlich vollständig ist, und mir wegen ihrer Einrichtung das Aufsuchen sehr erleichtert.

XV. Ohnerachtet ich die gewöhnliche trigonometrische Auflösung der Dreyecke, bey meinen Lesern voraussetzen darf, so können doch Fälle vorkommen, wo analytische Auflösungen theils brauchbarer theils bequemer sind. Ich gebe hier ein paar Formeln an, vermittelst deren man aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder aus drey Seiten eines Dreyecks, sehr leicht die übrigen unbekannten Stücke desselben berechnen kann. Vorher muß ich aber folgendes beybringen.

Es sey $\varphi = 90° + \alpha$ also um α größer als $90°$ so ist $\cot\varphi = \cot(90° + \alpha) = \frac{1}{\tang(90° + \alpha)} =$

$$-\frac{1}{\tang(90° - \alpha)} = -\frac{1}{\cot\alpha} = -\tang\alpha.$$

Und alsdann in XXI

$$\cot F = \frac{b}{a \sin(90° + \alpha)} + \tang\alpha$$

oder wegen $\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$$\cot F = \frac{b}{a \cos\alpha} + \tang\alpha$$

XXIII. Wenn fig. XXIII von der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie AF eine Perpendiculärlinie DC herabgefället wird, so ist $DC^2 = AD^2 - AC^2$

Und eben so $DC^2 = DF^2 - CF^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$

Mithin

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$$

oder

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - AF^2 + 2AF \cdot AC - AC^2$$

oder weil sich AC^2 auf beyden Seiten aufhebt, $AD^2 = DF^2 - AF^2 + 2AF \cdot AC$

also

also $AC = \frac{AD^2 + AF^2 - DF^2}{2 AF}$

Diese Formel bestimmt aus den 3 Seiten AD, AF, DF eines Dreyecks, das Stück AC der Grundlinie AF, welches von einer Perpendiculärlinie DC, auf AF abgeschnitten wird.

Eben so wird das andere Stück $CF = AF - AC$

oder

$$CF = \frac{AF^2 + FD^2 - AD^2}{2 AF}$$

Anwendungen dieser Formel werden sich in der Folge bey verschiedenen geometrischen Aufgaben zeigen.

XXIV. Die bisherigen Sätze habe ich kürzlich hier zum voraus schicken müssen, um mich in den folgenden Theilen dieser practischen Geometrie darauf beziehen zu können. Ich hielt es für nützlich, sie hier beysammen zu haben, weil ich sonst durch häufige Lehnsätze den ordentlichen Vortrag der practischen Lehren zu oft hätte unterbrechen müssen.

Statt der gewöhnlichen Lehrsätze aus der gemeinen Geometrie, die man oft den practischen Anleitungen zur Feldmeßkunst, voraus zu schicken pflegt,

pflegt, hielt ich das bisherige für fruchtbarer und nützlicher. Und was die gemeine Geometrie anbelangt, die muß ich bey meinen Lesern völlig zum voraus setzen.

Wer von der Elementargeometrie weiter nichts weiß, als die wenigen Lehrsätze, die man gewöhnlich ohne Beweis den Anleitungen zur practischen Geometrie vorauszuschicken pflegt, der wird nie im Feldmessen eine nur mittelmäßige Kenntniß erlangen; eben so müssen einem Geometer auch die wichtigsten Sätze der Arithmetik, z. E. von Decimalbrüchen, Logarithmen u. s. w. zureichend bekannt und geläufig seyn.

Anmerk. Wenn ich mich in der Folge auf die bisher beygebrachten trigonometrischen Sätze berufe, so wird dieses unter folgender Bezeichnung Trig. S. geschehen.

Die practische Geometrie.

Erster Theil.

I. Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über den Gegenstand der practischen Feldmeßkunst, und über die nöthigsten Kenntnisse eines Feldmessers.

§. 1.
Erklärung.

Die Feldmeßkunst (Geodaesia) ist eine Wissenschaft, die Figur eines kleinen Stücks unserer Erdfläche auf dem Papiere zu entwerfen, und zeigt überhaupt, wie man die theoretischen Lehren der Geometrie anwenden könne.

Messungen auf unserer Erdfläche aufs leichteste und vortheilhafteste zu bewerkstelligen und mit einander zu vergleichen.

Die nähere Vorstellung davon ist diese:

Man gedenke sich z. B. auf dem Felde die Krümmung eines Flusses, oder die Gränzen einer Waldung, eines Gebürges, die Lage einer gewissen Menge von Oertern u. d. g. so geben diese Dinge allemahl eine gewisse Figur.

Gesetzt es seyen die Punkte A, B, C, D, E, F, fig. I Oerter auf der Erdfläche. Man verbinde solche in Gedanken durch gerade Linien mit einander, so ergiebt sich auf dem Felde die Figur ABCDEF. Diese Figur nun auf dem Papiere zu entwerfen, das will sagen, auf dem Papiere eine kleinere Figur abcdef Fig. II zu verzeichnen, die der ABCDEF sowohl im ganzen als in ihren Theilen, so viel als möglich, und der jedesmahligen Absicht gemäß, ähnlich ist, auch alle Abmessungen, die dabey vorkommen, aufs leichteste und vortheilhafteste zu bewerkstelligen, dieses ist der Gegenstand der Feldmeßkunst. Die hiezu erforderlichen Lehren aus der theoretischen Geometrie, verbunden mit einer genauen Kenntniß und Behandlung der practischen Werkzeuge, machen die Wissenschaft eines Feldmessers aus.

Erklärung.

Wenn eine Figur abcdef auf dem Papiere der ABCDEF auf dem Felde, völlig ähnlich ist, folglich die Punkte a, b, c, d, e, f, eben die Lage gegen einander haben, welche den Winkelspunkten A, B, C, D, E, F der Figur auf dem Felde zukömmt, also nicht allein die Seiten ab, bc u. s. w. sich untereinander verhalten, wie die AB, BC, u. s. w., sondern auch der Ordnung nach die Winkel a = A; b = B; c = C u. s. w., kurz, wenn alle Theile der Figur auf dem Felde, sich in eben der Ordnung, Verhältniß und Lage, auch im kleinen bey der Figur auf dem Papiere vorfinden, dann sagt man, letztere sey ein Grundriß, ein topographischer Entwurf, oder auch eine Karte von der Figur auf dem Felde, oder von dem kleinen Stücke der Erdfläche.

Anmerkung.

§. 2. Eine solche geometrische Karte unterscheidet sich von einer geographischen darinn, daß erstere sich nur mit einem kleinen Stücke der Erdfläche beschäfftigt, und sowohl die Figur desselben im Ganzen, als auch die innerhalb derselben fallenden einzelnen Theile, als Städte, Dörfer, Flecken, Wege, Flüsse, Waldungen, Gebürge, Felder, Wiesen, mit allen Abtheilungen und Gränzen, kurz alle

merkwürdigen Punkte, welche in Lagerbüchern angemerkt zu werden pflegen, und zur genauern Kenntniß eines Landes, oder sonst zu einer Absicht dienlich seyn können, nach einem verjüngten Maasstabe, so genau als möglich in Absicht auf Grösse, Lage und Figur, abbildet.

Hingegen stellt eine geographische Karte meistens ein sehr großes Stück der Erdfläche dar, ohne Angabe aller kleinen einzelnen merkwürdigen Punkte, die sich darauf befinden: So z. E. nur die Figur eines ganzen Landes, die Hauptrichtung der Flüsse, die Lage der Städte u. s. w.

Zusatz.

§. 3. Hieraus erhellet, daß man in der Feldmeßkunst, die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren im Großen ausübt. Allein die gehörige Anwendung derselben hat auf dem Felde oft große Schwierigkeiten, weil die Stücke, welche an der Figur auf dem Felde gemessen werden müssen, um eine ihr ähnliche auf dem Papiere zeichnen zu können, wegen allerley Hindernisse oft keine unmittelbare Ausmessung, d. h. durch würkliche Anlegung des Maasstabes, Aufstellung eines Winkelmessers, u. dgl. verstatten, oder die unmittelbare Messung doch sonst mit Weitläuftigkeiten oder Beschwerligkeiten verknüpft seyn würde. So kann man

z. B. das Verfahren eine Figur aus ihren Seiten und Diagonallinien zu entwerfen, auf kein Stück Feld anwenden, das gerade in vollen Früchten stände, auf keinen Wald, in welchem die Bäume und Gebüsche welche der Messung der Diagonallinien im Wege stehen, sich nicht wegräumen lassen u. s. w. Man würde also in diesem Falle auf eine andere Methode, das Stück Feld zu entwerfen, bedacht nehmen müssen, aber unter den verschiedenen Methoden welche sich darbieten, muß der Feldmesser doch immer die leichteste und zweckmässigste auszuwählen wissen, wozu denn eine vorhergegangene genaue Untersuchung des zu vermessenden Stücks, nicht wenig behülflich ist.

Zugleich müssen dann auch in der Feldmeßkunst die Mittel angegeben werden, aus gewissen bekannten, oder willkührlich angenommenen Datis, diejenigen Umstände und Abmessungen einer Figur zu bestimmen, die man entweder gar nicht, oder nur sehr mühsam und mit viel Zeitaufwand unmittelbar erhalten könnte.

Die Auflösung solcher schweren Fälle, ergiebt sich durch eine gehörige Anwendung der theoretischen Geometrie, wo gezeigt wird, wie man Größen durch Schlüsse herausbringen, und mit einander vergleichen könne. In

solchen Fällen unterscheidet sich nun der wissenschaftliche Feldmesser, von dem sogenannten handwerksmäßigen, welcher aus Mangel nöthiger Kenntnisse, oft entweder gar nichts, oder mit unbeschreiblicher Mühe nur etwas sehr unvollkommenes leistet.

Anmerkung.

§. 4. Das Papier, worauf man eine gewisse Figur auf dem Felde zu entwerfen hat, ist eine ebene Fläche; Nun aber liegen die Theile einer Figur auf dem Felde, sehr selten in einer einzigen Ebene. Es frägt sich daher, wie man in solchen Fällen sich verhalten müsse. Denn das läßt sich leicht übersehen, daß es unmöglich ist, auf einer ebenen Fläche eine Figur einer andern ähnlich zu machen, deren Theile nicht alle in einer einzigen Ebene liegen.

Um diese Schwierigkeit gehörig ins Licht zu setzen, und zu zeigen, wie man bey ihr zu verfahren habe, muß ich vorher einige Sätze, die in der Feldmeßkunst überall gebraucht werden, zum voraus schicken.

Es lehret die Erfahrung, daß die Richtungen zweyer oder mehrerer Fäden, an denen man schwere Körper z. E. Bleykugeln herab-

hängen läßt, so genau, als man es bemerken kann, mit einander gleichlaufend sind. Eine ebene Fläche, die man sich auf die Richtungen dieser Fäden, welche man Verticallinien nennet, senkrecht gedenkt, heißt eine Horizontalebene, Horizontalfläche, und jede andere Fläche eine schiefe.

So sind z. B. die schrägen Abdachungen der Berge keine Horizontalflächen, denn jeder Versuch wird zeigen, daß die Richtung eines Fadens, woran ein Körper hängt, mit der Anhöhe eines Bergs schiefe Winkel macht.

Hingegen wird die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, auch die Ebene des sogenannten platten oder flachen Landes horizontal seyn.

So kann man sich an jedem Orte, wo man ist, eine Horizontalfläche gedenken, und solche nach allen Gegenden, soweit man will, erweitert vorstellen.

Auch werden alle Horizontalflächen mit einander parallel seyn, weil sie insgesammt auf den parallelen Richtungen der Verticallinien senkrecht stehen.

Diese Horizontalflächen sind in der practischen Geometrie von unendlichem Gebrauche, weil man sie in jedem Falle, vermittelst eines

solchen Fällen unterscheidet sich nun der wissenschaftliche Feldmesser, von dem sogenannten handwerksmäßigen, welcher aus Mangel nöthiger Kenntnisse, oft entweder gar nichts, oder mit unbeschreiblicher Mühe nur etwas sehr unvollkommenes leistet.

Anmerkung.

§. 4. Das Papier, worauf man eine gewisse Figur auf dem Felde zu entwerfen hat, ist eine ebene Fläche; Nun aber liegen die Theile einer Figur auf dem Felde, sehr selten in einer einzigen Ebene. Es frägt sich daher, wie man in solchen Fällen sich verhalten müsse. Denn das läßt sich leicht übersehen, daß es unmöglich ist, auf einer ebenen Fläche eine Figur einer andern ähnlich zu machen, deren Theile nicht alle in einer einzigen Ebene liegen.

Um diese Schwierigkeit gehörig ins Licht zu setzen, und zu zeigen, wie man bey ihr zu verfahren habe, muß ich vorher einige Sätze, die in der Feldmeßkunst überall gebraucht werden, zum voraus schicken.

Es lehret die Erfahrung, daß die Richtungen zweyer oder mehrerer Fäden, an denen man schwere Körper z. E. Bleykugeln herabhän-

hängen läßt, so genau, als man es bemerken kann, mit einander gleichlaufend sind. Eine ebene Fläche, die man sich auf die Richtungen dieser Fäden, welche man Verticallinien nennet, senkrecht gedenkt, heißt eine Horizontalebene, Horizontalfläche, und jede andere Fläche eine schiefe.

So sind z. B. die schrägen Abdachungen der Berge keine Horizontalflächen, denn jeder Versuch wird zeigen, daß die Richtung eines Fadens, woran ein Körper hängt, mit der Anhöhe eines Bergs schiefe Winkel macht.

Hingegen wird die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, auch die Ebene des sogenannten platten oder flachen Landes horizontal seyn.

So kann man sich an jedem Orte, wo man ist, eine Horizontalfläche gedenken, und solche nach allen Gegenden, soweit man will, erweitert vorstellen.

Auch werden alle Horizontalflächen mit einander parallel seyn, weil sie insgesammt auf den parallelen Richtungen der Verticallinien senkrecht stehen.

Diese Horizontalflächen sind in der practischen Geometrie von unendlichem Gebrauche, weil man sie in jedem Falle, vermittelst eines

mit

mit Wasser angefüllten Gefäßes, sinnlich machen kann.

Nach diesen Betrachtungen werde ich nun die im Anfange dieses §. gedachte Schwierigkeit zu heben, und eine richtige Vorstellung von einem geometrischen Grundrisse zu geben suchen.

Man stelle sich demnach vor, die Punkte a, b, c, d, e, (fig. III) auf dem Felde, seyen nicht alle in einer einzigen Ebene, sondern nach Gefallen einer über den andern erhöhet, (wie z. E. die Spitzen verschiedener Gebürge, oder ein ganzes Gebürge, wie es sich über dem platten Lande erhebt) und gedenke sich nun auf dem Felde, wo man will, eine Horizontalfläche.

Die Ebene des Papiers, worauf sich die III Figur befindet, mag die Horizontalfläche vorstellen, und die Punkte a, b, c, d, e seyen also nach Gefallen über dieselbe erhoben.

Man fälle von den Punkten a, b, c, d, e auf die Horizontalfläche die Perpendiculär- oder Verticallinien aα, bβ, cγ, dδ, eϵ, herab.

Die Punkte α, β, γ, δ, ϵ, wo diese Perpendiculärlinien in die Horizontalfläche eintreffen, nennet man die Projectionen der Punkte a, b, c, d, e, auf die Horizontalfläche,

che, oder man sagt, α, β, γ, δ, ε, seyen die auf den Horizont reducirten Punkte a, b, c, d, e. Die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ u. s. w. heißen die auf den Horizont reducirten Linien ab, bc u. s. w.

Und so ist klar, wie man sich überhaupt eine ganze Figur auf dem Felde mit allen ihren Theilen, auf die Horizontalfläche reducirt vorstellen könne.

Eine solche auf den Horizont gebrachte Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, deren Theile nun alle in einer einzigen Ebene liegen, ist es eigentlich, um die man sich in der Feldmeßkunst bekümmert, und von der man auf dem Papiere einen Grundriß verfertigen kann.

Eine Figur auf dem Papiere, die nemlich der auf den Horizont reducirten Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ähnlich ist, heißt eigentlich der Grundriß der Figur abcde.

So würde also der Grundriß eines Gebirges diejenige Figur auf dem Papiere vorstellen, welche derjenigen ähnlich wäre, welche man erhielte, wenn man die Gränzen und die ganze Oberfläche des Bergs auf die Horizontalfläche reducirt hätte.

Und so erhellet denn ferner, was z. B. unter dem Grundriß eines ganzen Landes zu verstehen seyn würde.

Zusatz.

§. 5. Ein Grundriß kann also nicht die verschiedenen Erhöhungen der einzelnen Theile einer Figur über der Horizontalfläche, angeben, sondern er bestimmt blos den Raum, den eine gegebene Figur auf der Horizontalfläche einnimmt.

Von den Grundrissen unterscheidet man im Gegentheil die Profilrisse, Figuren, welche man erhielte, wenn man z. B. eine bergigte Gegend, mit einer auf der Horizontalfläche senkrechten Ebene, mit einer Vertical-Ebene, durchschnitte und abbildete. Auf solchen Profilrissen werden also eigentlich die Erhöhungen dieser oder jener Punkte über der Horizontalfläche angegeben.

Zusatz.

§. 6. Man setze, es werde (fig. III.) durch den über der Horizontalfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ erhabenen Punkt e, die Linie en mit $\varepsilon\gamma$ und ei mit $\varepsilon\delta$ parallel gezogen, so sind die Linien en, ei, horizontal, und der Winkel ien = $\delta\varepsilon\gamma$. Auch liegt en in der Verticalebene durch eε, cγ; und ei in der durch eε, δd.

Es ist daher der Winkel ien = $\delta\varepsilon\gamma$ das Maaß des Neigungswinkels, den die Verticalebene durch die beyden Gegenstände e, d,

mit

mit der Verticalebene macht, in der die Gegenstände e und c liegen.

Wenn man also im Stande ist, auf dem Felde bey e den Winkel ien zu messen, den ein paar Horizontallinien ei, en in den erwähnten Verticalebenen durch e und d, und durch e und c, mit einander machen, so hat man den Winkel $\delta\varepsilon\gamma$, den die drey Gegenstände d, e, c im Grundrisse mit einander machen müssen.

Wenn e, d, ein paar Punkte sind, durch welche eine Verticalebene gelegt ist, so werde ich in der Folge diese Verticalebene bloß durch ed bezeichnen, nemlich bloß durch zwey Buchstaben, die sich auf die Punkte oder Gegenstände e, d, beziehen, durch welche man sich eine Verticalebene vorstellet.

Zusatz.

§. 7. Man verlängere die horizontale ei bis sie bey m in die Verticallinie δd einschneidet, so ist em = $\varepsilon\delta$.

Es ist also ed die wahre Entfernung der beyden Gegenstände e, d.

em = $\varepsilon\delta$ ist aber die Entfernung der beyden Punkte e, d, nach der Horizontal-

Linie gerechnet, oder ihr Horizontal-Abstand, und diese em oder $\varepsilon\delta$ ist es eigentlich, die man im Grundrisse für den Abstand der beyden Oerter e und d angiebt.

Zusatz.

§. 8. Der Triangel dme ist bey m rechtwinklicht, und eine Ebene durch ihn, stehet auf der Horizontalfläche senkrecht:

Auch drückt das Stück dm aus, um wie viel der Ort d niedriger als e, oder um wie viel e höher liegt als d.

Wäre also in dem Dreyecke dme, die wahre Entfernung ed, (§. 7) und die Tiefe des Punkts d unter e, oder dm gegeben, so könnte man daraus em = $\varepsilon\delta$, oder die auf den Horizont reducirte Entfernung der beyden Gegenstände e, d berechnen; denn es wäre

$$em = \varepsilon\delta = \sqrt{(ed^2 - md^2)}$$

Auch ließe sich der Winkel dem berechnen; für ihn wäre

$$\sin dem = \frac{md}{de}$$

Es ist aber dem die Neigung des Schenkels ed, oder der wahren Weite beyder Objecte e, d, gegen die Horizontallinie em.

Hat

Hat man eben so, auch die Neigung des Schenkels ec gegen die Horizontallinie en, so kann man aus den gegebenen Neigungen der beyden Schenkel ec, ed, nebst dem Winkel dec, den sie mit einander machen, den Horizontalwinkel men = δεγ, durch die sphärische Trigonometrie finden. Von dieser Auflösung aber, die in der practischen Feldmeßkunst von großer Wichtigkeit ist, werde ich in der Folge reden.

Anmerkung.

§. 9. Die bisherigen Betrachtungen zeigen den Grund von verschiedenen Aufgaben und Operationen auf dem Felde.

Die Ursache aber, warum man eine Figur auf die Horizontalfläche reduciret, ist:

I) Weil sich die Lage und Richtung einer horizontalen Ebene, weit leichter angeben, und sinnlich machen läßt, als jede andere, die gegen den Horizont geneigt wäre. Denn man darf sich an einem gewissen Orte nur eine Wasserfläche, oder die Oberfläche des Wassers in einem Gefässe gedenken, so hat man sogleich daselbst eine horizontale Ebene.

II) Weil man den natürlichen Werth eines Grundstückes, oder überhaupt eines Landes, mit nach dem Raume beurtheilt, den sol-

ches auf der Horizontalfläche einnimmt; Da nämlich die Erfahrung lehret, daß fast alle Früchte und Gewächse nach verticalen, oder auf der Horizontalebene senkrechten Richtungen wachsen, so schließt man, daß auf den erhabenen, gewölbten und ungleichen Flächen einer bergigten Gegend nicht mehr Gewächse stehen können, als auf dem ebenen Lande.

In wie ferne dieser Schluß gegründet ist, will ich hier nicht untersuchen. Man kann mehreres davon in Wilkens Landesvermessungen §. 229. Penthers practischer Geom. und andern Schriftstellern nachlesen. In den Abhandl. der Holländ. Gesch. d. Wissenschaften zu Harlem 1774, sucht besonders Hr. Carrard in einer Abhandlung das Gegentheil der gewöhnlichen Voraussetzung darzuthun.

Einen hieher gehörigen interessanten Aufsatz s. m. auch in der Berliner Monatsschrift. Jun. 1793. S. 563.

Bergigte Gegenden sind ohnstreitig für gewisse Arten von Producten z. E. für Wein und Hopfen fruchtbarer und ergiebiger, als flache; die Bestimmung des natürlichen Werthes eines Grundstücks, in so fern er bloß von dem Horizontalraume des Grundstückes abhängt, gehört aber bloß für den Geometer; was

sonst

sonst auf dessen Werth Einfluß hat, muß durch physicalische und ökonomische Gründe entschieden werden, und gehört nicht hieher.

Zusatz.

§. 10. Eine der nöthigsten Vorschriften eines Feldmessers bestehet also darinnen, alle Abmessungen der Theile einer Figur, auf den Horizont zu reduciren; Je unebener das Stück der Erdfläche ist, auf dem man misset, desto wichtiger ist diese Vorschrift.

Die Gränzen der gemeinen Feldmeßkunst.

§. 11. Diese erstrecken sich eigentlich nur über einen so großen Theil der Erdfläche, als für welchen es ohne merklichen Fehler verstattet ist, die Richtungen der Verticallinien, und folglich auch die auf ihnen senkrecht stehenden Horizontalebenen nach §. 4. für parallel anzunehmen.

Nun wissen wir aber, daß unser Erdkörper sehr nahe die Gestalt einer Kugel hat, gegen deren Grösse die Erhöhungen und Vertiefungen, die wir Berge und Thäler nennen, sehr unbeträchtlich sind. Wir wollen uns die Oberfläche der Erde als eine vollkommen glatte Kugelfläche gedenken, und sehen, was diese kugelförmige Gestalt auf die Erfahrungen §. 4. für einen Einfluß habe.

Es sey demnach $\alpha\beta$ (Fig. IV) ein kleines Stückchen der eigentlichen kugelförmigen Oberfläche, und e ein Punkt nach Gefallen über dieselbe erhoben z. E. e die Spitze eines Berges. Man kann die Krümmung dieses Stückchens $\alpha\beta$ bey Seite setzen, und es ohne merklichen Fehler für eine ebene Fläche annehmen. Je kleiner man sich $\alpha\beta$ gedenkt, desto weniger wird die Krümmung von $\alpha\beta$ für unsere Sinne merklich seyn.

Nun gedenke man sich bey e eine Wasserfläche (§. 9. I.) so wird d e auf ihr senkrecht des Orts e Verticallinie vorstellen.

Weil nun aber die Wasserfläche an jedem Orte e auf der Erde, wie die Physik lehrt, allemahl mit dem kleinen Stückchen $\alpha\beta$ der eigentlichen Kugeloberfläche, über dem sich der Ort befindet, parallel läuft, so wird d e auch auf $\alpha\beta$ senkrecht stehen, und es ist daher ein jedes sehr kleines Stückchen der kugelförmigen Erdfläche, wie die Wasserfläche, selbst eine Horizontalebene.

Nun sey an einem andern Orte i, welcher sich über dem Stükchen $\gamma\delta$ der Erdfläche befinde, ebenfalls ik, eine auf der Wasserfläche, und folglich auf $\gamma\delta$ senkrechte Linie. Weil also d e, auf $\alpha\beta$, und i k auf $\gamma\delta$ senkrecht stehen, so müssen offenbar beyde Verticallinien

d e,

de, ik, nach dem Mittelpunkte oder Erdkugel hinlaufen.

Auf diese Art kommen eigentlich alle Verticallinien in dem Mittelpunkte der Erdkugel zusammen, und sind daher wie oben §. 4 zum voraus gesetzt worden, nicht parallel. Weil aber der Mittelpunkt der Erde von der Oberfläche derselben, ohngefähr um 860 deutsche Meilen entfernt ist, und man Linien, die sich in einem so weit entlegenen Punkte, und unter einem sehr kleinen Winkel durchschneiden, ohne großen Fehler als parallel ansehen kann, so erhellet, daß, wenn die beyden Oerter e, und i, nicht sehr weit von einander entfernt sind, und folglich ihre Verticallinien ed, ik, bey c nur unter einem sehr kleinen Winkel eci zusammentreffen, man auch ohne merklichen Irrthum berechtigt ist, die Richtungen dieser Verticallinien selbst, so weit man es durch die Sinne bemerken kann, folglich auch die auf ihnen senkrecht stehenden Horizontalflächen, als gleichlaufend, und den Theil der kugelförmigen Erdfläche, oder auch der sogenannten scheinbaren Horizontalfläche zwischen e, und i, als eben, oder ohne merkliche Krümmung zu betrachten. In so ferne ist also die Erfahrung §. 4 richtig und so weit gehen auch nur die Gränzen der gemeinen Feldmeßkunst.

Sie erstrecket sich also nur auf ein sehr kleines Stückchen der Erdfläche, in soferne es keine merkliche Krümmung hat, und lehret, wie die Figur desselben, auf dem Papiere entworfen werden könne.

Hätte man ein sehr großes Stück der Erdfläche auf dem Papiere zu entwerfen, so gehören dazu Kenntnisse der höheren Mathematik und Astronomie, die aber, so lange man nur ein kleines Stück der Erdfläche betrachtet, nicht unumgänglich nothwendig sind. Man könnte indessen denken, weil sich nach den Regeln der gemeinen Feldmeßkunst, ein jedes kleines Stückchen der Erdfläche entwerfen läßt, so dürfte man nur alle diese kleinen Stückchen zusammen setzen, um den Grundriß oder die Projection eines sehr großen Theils der Erdfläche zu erhalten.

Allein wegen der Krümmung unserer Erdfläche gehet auch dieses so geradezu nicht an. Denn ein solches aus einzeln gemessenen Theilen zusammengesetztes und gleichsam in eine ebene Fläche ausgebreitetes Stück der Erdfläche, kann niemals dem Urbilde auf der Kugel ähnlich seyn. Auch kann überhaupt kein grosses Stück der Erdfläche auf irgend eine andere Art, so auf dem Papiere entworfen werden, daß es dem Originale auf der Kugel vollkommen entspräche. Man begnügt sich daher

her in der mathematischen Geographie mit per-spectivischen Entwerfungen der Erdfläche, oder mit anderen, wodurch sonst gewisse Absichten erreicht werden können, und befriedigt sich, wenn die Charten nur nicht zu sehr von dem Urbilde abweichen. Es ist aber hier der Ort nicht, mich in das weitere Detail der geographischen Charten einzulassen, da hier nur von den Gränzen der gemeinen Feldmeßkunst die Rede ist.

Indessen erstrecket sich aber diese doch schon auf eine beträchtliche Weite. Denn unsere Erde ist so groß, daß man einen Distrikt von 12 bis 15 Quadratmeilen wohl ohne merklichen Irthum als eben ansehen, und ihn also nach den Regeln der gemeinen Feldmeßkunst vermessen, und auf eine einzige etwa durch die Mitte des Landes gehende Horizontalfläche entwerfen kann. Wenigstens läßt sich alsdann der von der sphärischen Gestalt der Erdfläche herrührende Fehler, sehr leicht beurtheilen, wie in der Folge näher erhellen wird.

Von den Zeichnungen sehr grosser Stücke der Erdfläche s. m. den IVten Theil dieser practischen Geometrie, welcher auch unter dem Titel: Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land- See- und Himmelscharten (Erlangen 1794) erschienen ist. (Zweyte Auflage 1804).

Die nothwendigsten Kenntnisse eines Feldmessers.

§. 12. Diese sind:

1) Eine vollständige Kenntniß der theoretischen Elementargeometrie, und insbesondere der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren.

2) Kenntniß trigonometrischer Rechnungen; ohne welche bey Vermessungen, die nur einigermaaßen ins Große gehen, wenig oder gar nichts geleistet werden kann. Hauptsächlich verschaffen die oben beygebrachten trigonometrischen Formeln, viel wichtige Abkürzungen und Vortheile bey allerley in der Feldmeßkunst vorkommenden Rechnungen und Untersuchungen.

3) Werden auch die ersten Gründe der Algebra von sehr großem Nutzen seyn.

4) Da bey geodätischen Arbeiten immer gewisse Linien und Winkel unmittelbar gemessen werden müssen, um andere unbekannte Stücke daraus herleiten zu können, so erfordern jene Messungen eine vorzügliche Sorgfalt und Genauigkeit, wenn die daraus hergeleiteten Bestimmungen nicht öfters sehr unrichtig ausfallen sollen. Dazu gehört nicht nur eine gewisse natürliche

oder

oder durch Uebung erlangte Fertigkeit in der Behandlung der dazu erforderlichen Werkzeuge, wenn grobe Fehler vermieden werden sollen, sondern es muß

5) der Feldmesser auch genau die Natur und Einrichtung der Werkzeuge kennen, mit denen er Messungen anstellt: Er muß ihre Fehler zu beurtheilen und zu prüfen wissen.

Fehler, die eine ungeschickte Behandlung der Werkzeuge zum Grunde haben, werden allemal auf Rechnung des Feldmessers gesetzt: Hingegen solche Fehler, die aus der Unvollkommenheit der Werkzeuge (z. E. bey einem Winkelmesser, aus der Unmöglichkeit, einen Kreis völlig genau einzutheilen u. s. w.) entspringen, kann wohl kein Feldmesser vermeiden: Er muß aber doch wenigstens aus der Natur eines Instruments mit einiger Wahrscheinlichkeit zu beurtheilen wissen, wie genau er mit demselben messen könne, und ob die unvermeidlichen Fehler in den gemessenen Stücken, auf die Bestimmung der unbekannten, einen beträchtlichen Einfluß haben, oder nicht.

Eine vorzügliche Sorgfalt erfordern die Winkel-messenden Werkzeuge.

Mit einem Worte, er muß den Grad der Zuverläßigkeit einer Vermessung, wenn es verlangt wird, anzugeben wissen.

6) Bey einer jeden Messung ist es Pflicht des Geometers, die Arbeit baldmöglichst zu beendigen. Er muß also mit Plan und Ordnung zu Werke gehen, nichts überflüssiges messen, und eine gute Auswahl der unmittelbar zu messenden Linien und Winkel zu treffen wissen. Die Stücke, die man unmittelbar mist, müssen ein schickliches Verhältniß gegen die daraus herzuleitenden Bestimmungen haben, sich bequem messen lassen, und den möglichsten Grad der Genauigkeit beym Fortgange der Messung gewähren, damit man nicht nöthig habe, immer wieder viel andere Stücke zu messen, blos um vorgefallene Fehler aufzusuchen und zu verbessern, welches oft eine sehr mißliche Sache ist, und einen unnützen Zeit- und Kostenaufwand verursacht. Noch unverzeihlicher ist es, wenn eine Arbeit aus eigennützigen Absichten nicht gefördert wird, wie leider sehr oft der Fall ist.

7) Da eine genaue Messung der Linien und Winkel immer die Hauptsache in der praktischen Geometrie ist, so muß der Feldmesser

allein die Fehler kennen, welche von der Unvollkommenheit der Werkzeuge herrühren, sondern sich auch um allerley physicalische Ursachen bekümmern, welche unsere Messungen unsicher machen, und besonders bey wichtigen Vermessungen alle Aufmerksamkeit verdienen.

Dahin gehören z. B.

a) Fehler, die von der Undeutlichkeit entfernter Gegenstände herrühren: Daß weit wegliegende Gegenstände uns undeutlich erscheinen, liegt theils in der innern Beschaffenheit unseres Auges (wovon die weitere Erklärung in die Optik gehört) theils in der geringen Größe des Winkels, unter welchem entfernte Gegenstände oder Theile derselben dem Auge erscheinen (des optischen oder Sehewinkels) theils in der Schwächung des von ihnen herkommenden Lichtes in der Atmossphäre, und in mehr andern Umständen, die hier nicht alle erklärt werden können.

Die Fogle aber hieraus, ist diese:

Wenn man in einer gewissen Entfernung ein kleines Object, das z. B. unter einem Winkel von einer Minute ins Auge

fällt, nicht mehr deutlich erkennen kann, so mögen z. B. die Diopteren eines Winkelmessers oder Mestisches, nach dem Augenmaaße zu urtheilen, noch so genau nach einem solchen Gegenstande gerichtet zu seyn scheinen, so bleibt es dennoch mit der Ungewißheit einer Minute unentschieden, ob man die Diopteren nicht noch um etwas verrücken soll.

b) Fehler, die von den Strahlenbrechungen herrühren. Ein Lichtstrahl, der nemlich von einem erhabenen Objecte durch die Luft in unser Auge kömmt, geht in keiner geraden Linie fort; und daher erfordern besonders Winkel, die solche Gegenstände an unserm Auge machen, einige Verbesserungen. (m. s. unten §. 200.)

c) Fehler, die von der Voraussetzung herrühren, daß alle Mittagslinien, wie auch die Richtungen der Magnetnadel, sich beständig parallel sind. Doch hierüber werde ich mich erst in der Folge näher erklären können. (§. 117 ꝛc.)

8) Ueberhaupt sind aber auch aus der Ursache einem Geometer die vornehmsten Kenntniße der Naturlehre wichtig, weil verschiedene Vorrichtungen an den Werkzeugen, wie auch einige practische Arbeiten selbst, ohne sie nicht gehörig verstanden werden können.

Ins-

Insbesondere sind die optischen Wissenschaften von sehr grossem Gebrauche in der Feldmeßkunst. Auf ihnen beruht die Vervollkommnung der Winkel-messenden Werkzeuge durch Fernröhre und durch Micrometer die man in denselben anbringt, der so nützliche Gebrauch der Spiegelsextanten und ähnlicher catoptrisch-dioptrischen Werkzeuge, wie in der Folge mit mehreren erhellen wird.

Auf andern physischen Lehren beruhen oft nützliche Ausmessungsmethoden z. B. das Höhenmessen vermittelst des Barometers, die Bestimmung der Weiten durch Hülfe des Schalles, durch Pulversignale u. dergl.

Lambert hat in seinen vortreflichen Beyträgen zur practischen Geometrie nicht nur die Data und Hülfsmittel aufgezählt, die die Feldmeßkunst aus der Physik erhält, sondern auch den Grad ihrer Genauigkeit und die Absicht bey ihrem Gebrauche zu bestimmen gesucht. M. s. dessen Beyträge zum Gebrauche der Mathematik. Berlin 1769-1772. 3 Theile, im ersten Theile §. 87. u. ff.

9) In sofern alle geometrischen Werkzeuge nach Beschaffenheit ihrer innern Einrichtung, ih-

rer Abtheilungen u. s. w. bey den Messungen grössere oder kleinere Fehler zulassen, muß der Geometer immer dasjenige Werkzeug auszuwählen wissen, welches dem Zwecke und dem Grade der Genauigkeit der damit vorzunehmenden Messungen am angemessensten, nicht zu zusammengesetzt, im ganzen sowohl, als in allen seinen Theilen fleißig ausgearbeitet, dauerhaft, und wo möglich, zu mehreren als einem Endzwecke, dienlich ist.

10) Denn es ist klar, daß man bey jeder Vermessung sich allemal nach dem Grade ihrer Wichtigkeit verhalten müsse. Man muß zu beurtheilen wissen, in welchen Fällen es sich der Mühe verlohnt, mehr oder weniger Genauigkeit zu beobachten, und in wie ferne man dadurch unnöthige Arbeit und Kosten ersparen könne.

Wenn z. B. ein Feldmesser bey der Ausmessung eines kleinen Ackers oder Wiesenstücks so ängstlich in der haarscharfen Messung aller Linien und Winkel verfahren, und dabey so kostbare Werkzeuge anwenden wollte, als bey weitläuftigen Landesvermessungen oft nöthig ist, so würde dies eine Mühe seyn, die ihm Niemand belohnen würde. Ja es würde eine Thorheit seyn, wenn er hiebey so viel Sorgfalt und Genauigkeit anwenden wollte. Aber

Aber je mehr eine Messung ins Große geht, desto mehr hat er Ursache, auf alle Fehler Rücksicht zu nehmen, die vom Visiren, von der Unvollkommenheit der Werkzeuge u. d. gl. herrühren können, und desto weniger darf er sich vorsetzlich kleine Fehlerchen erlauben, deren Folge oft sehr beträchtlich ist.

Noch einige nothwendige Erinnerungen.

§. 13. I) Ich habe schon im vorhergehenden gesagt, daß man auf dem Felde nicht mehrere Stücke unmittelbar zu messen braucht, als zur Bestimmung der unbekannten, unumgänglich erfordert werden.

Indessen pflegt man doch unterweilen einige Stücke auszumessen, die zwar an sich überflüßig sind; aber aus welchen man den Grad der Zuverläßigkeit einer Vermessung beurtheilen will.

Hätte man z. B. in einem Dreyecke auf dem Felde, zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gemessen, so reichen zwar diese Data zu, um den ganzen Triangel auf dem Papiere zu verzeichnen, und die übrigen unbekannten Theile desselben entweder durch Zeichnung oder Rechnung zu finden.

Wäre aber in Messung der erwähnten drey Stücke irgendwo ein Fehler begangen worden, so würde sich dieses zeigen, wenn man in dem Dreyecke noch ein viertes Stück mäße, und solches mit eben dem Stücke vergliche, wie es sich aus den erstern drey ergebenen nach der Construction oder Rechnung ergäbe. Zeigte sich, daß dieses zum Ueberfluß gemessene vierte Stück des Dreyecks, mit der Berechnung nicht übereinstimmt, so sind folgende drey Fälle möglich.

Entweder ist bloß in den drey ersten Datis, die zur Bestimmung des Dreyecks nothwendig waren, ein Fehler vorgefallen.

Oder: Die ersten drey Data sind richtig gemessen worden, und es ist nur ein Fehler in dem zur Prüfung der Arbeit gemessenen Stücke begangen worden.

Oder: man hat, sowohl in der Messung der erstern drey, als auch des vierten Stücks gefehlet.

Findet der erste Fall statt, so würde freylich das vierte richtig gemessene Stück, die fehlerhafte Bestimmung der erstern drey anzeigen.

Bey dem zweyten und dritten Falle würde sich aber aus dem zur Prüfung gemessenen

senen Stücke, nichts auf die Richtigkeit der ganzen Arbeit schliessen lassen. Wir folgern also hieraus, daß, wenn man aus einigen zum Ueberfluß gemessenen Dingen, über die Richtigkeit einer ganzen Vermessung soll urtheilen können, man solche Stücke selbst mit aller möglichen Sorgfalt bestimmen müsse. Die Vergleichung des zur Prüfung einer Arbeit gemessenen Stücks, mit eben demselben, wie es sich durch Rechnung oder Zeichnung ergeben hat, zeigt nun zwar gewöhnlich, ob ein Fehler in der Vermessung vorgefallen, aber nicht, wo derselbe begangen worden. Daher oft mehrere Stücke zur Prüfung einer Arbeit gemessen werden müssen.

II) Es läßt sich leicht zeigen, daß ein Fehler, der in Messung der gegebenen, oder willkührlichen Theile einer Figur vorgefallen ist, nicht durchgehends auf jedes der daraus herzuleitenden Stücke gleich großen Einfluß hat: sondern daß die Folge eines Fehlers, bald größer bald kleiner ausfällt, je nachdem die Theile einer Figur diese oder jene Lage gegen einander haben. Es kann sich also zutragen, daß man gerade ein Stück zur Prüfung misset, auf welches die begangenen Fehler, gar keinen Einfluß gehabt. — Wie würde sich also aus einem solchen Stücke beurtheilen lassen, ob irgendwo in der Figur eine Unrichtigkeit stecke?

Ueberhaupt muß also ein Feldmesser ohngefähr wissen, dasjenige Stück zur Prüfung auszuwählen, auf welchem die Folge der begangenen Fehler am sichtbarsten ist, und woraus sich am meisten etwas auf die Richtigkeit des Ganzen schliessen läßt.

III) Ließe sich in jedem Falle, würklich die wahre Größe des Fehlers angeben, den man bey der Ausmessung eines gewissen Stücks begangen hätte, so würde man ohne Schwierigkeit die auf die ganze Figur erfolgende Verbesserung berechnen können, und es würde so gut seyn, als wenn man gar keinen Fehler begangen hätte, wenn man dessen Größe kennet.

Allein da eben diese, bey allen practischen Arbeiten vorfallenden, und nicht zu vermeidenden Fehler bald größer bald kleiner seyn können, so bleibt weiter kein Hülfsmittel als folgendes übrig:

Man nimmt an, daß man einen Fehler begangen hat, beurtheilt dessen Möglichkeit, und wahrscheinliche Größe, aus der Einrichtung und Schärfe der Werkzeuge, mit denen man gemessen hat, und schätzt daraus dessen Folge, in Absicht auf die ganze Figur: das will sagen: Wenn man sich z. B. eines Winkelmessers bediente, bey dem man für einen Fehler von 2' nicht

nicht gut stehen könnte, so nimmt man an, man begehe bey der Messung eines jeden Winkels einen Fehler von 2′, berechnet nun, was daraus in Absicht der unbekannten Stücke und der ganzen Figur für eine Unrichtigkeit erfolgen kann, und schätzt also daraus die größte mögliche Zuverlässigkeit einer Vermessung. Denn ob man gleich vielleicht einen kleinern Fehler als von 2′ begehen kann, so ist man doch darinnen ungewiß, wenn das Werkzeug keine größere Genauigkeit zuläßt. Aus der Möglichkeit, einen solchen Fehler zu begehen, muß man also den Grad der Zuverläßigkeit beurtheilen.

IV) Die Theorie von den Folgen der Fehler ist daher unstreitig für jeden Feldmesser der sich nur etwas über die gemeinsten Kenntnisse erheben will, von der größten Wichtigkeit, indem er daraus beurtheilen lernt, auf welche Stücke einer Figur er seine besondere Aufmerksamkeit zu richten hat, um der ganzen Messung den erforderlichen Grad der Zuverläßigkeit zu verschaffen, und den Einfluß der unvermeidlichen Fehler möglichst zu vermindern. Von diesen und mehreren hiermit in Verbindung stehenden Betrachtungen, wird in der Folge ebenfalls das Nöthige beygebracht werden.

II. Kapitel.

Von der Verwandlung und Vergleichung der Fußmaaße untereinander.

§. 14. Ehe wir die Ausmessung gerader Linien auf dem Felde zeigen können, müssen wir erstlich von den hierzu gehörigen Maaßen, ihrer verschiedenen Größe und Eintheilung, reden.

Was nun erstlich die Größe derselben anbelangt, so ist darinnen bis jetzt nichts allgemeines festgesetzt, es herrscht vielmehr bey dieser Bestimmung eine unendliche Verschiedenheit, selbst in einem und demselben Lande.

Jedes Maaß ist an sich willkührlich, und eben daher rührt es, daß die Längenmaaße fast an allen Orten von einander abweichen. Schon in den ältesten Zeiten wurden Längenmaaße von der Größe gewisser Körper, oder ihrer Theile hergenommen. Z. E. von dem menschlichen Körper, die Spanne, der Schritt, der Fuß, der Zoll oder Daumen, die Klafter u. d. gl. Allein die Veränderlichkeit dieser

Be:

Bestimmungen erregte bey dem mancherley Verkehre der Menschen täglich große Verwirrung, und man fand sich daher in die Nothwendigkeit versetzt, Vergleichungen, oder Verhältnisse zwischen den an verschiedenen Orten, und bey verschiedenen Völkern eingeführten Längenmaaßen zu suchen, und auch mit diesen müssen wir uns gegenwärtig behelfen, so lange nicht überall einerley Längenmaaß festgesetzt und eingeführt ist. Wegen des so großen Vortheils, den menschliche Geschäfte, durch ein allgemein übereinstimmendes Längenmaaß erhalten würden, haben in der That schon mehrere berühmte Männer, Vorschläge zu dergleichen bekannt gemacht, und gesucht, ein solches von einem Gegenstande herzunehmen, welcher keiner Veränderlichkeit unterworfen ist. Schon Christoph Wren, Hunghens, *Bouguer* (Fig. de la Terre p. 300) und *Condamine* (Voy. de la Riviere des Amazons p. 202. suiv.) haben dazu die Länge eines Secunden-Pendels unter dem Aequator, oder sonst einem bestimmten Orte auf der Erde, empfohlen; Allein, sowohl die ganz genaue Bestimmung, als auch Mittheilung eines solchen Normalmaaßes hat eigene Schwierigkeiten, worüber in folgender Schrift: Versuch, durch Zeitmessung unveränderliche Längen-Körper- und Gewichtmaaße zu erhalten, ohne dabey der zur Bestimmung des Mittelpunkts der Schwingung, oder d--

wahren Länge der Pendel erforderlichen mechanischen Vorrichtungen zu bedürfen, von Joh. Whitehurst ... aus dem engl. mit Anmerkungen, von J. H. Wiedmann. Nürnberg, im Verlage der Raspischen Buchh. 1790. mit mehrerm nachgesehen werden kann. Diese Schwierigkeiten mögen zum Theil Ursache seyn, daß man den so nützlichen Vorschlag eines allgemeinen Fuß = oder Längenmaaßes noch nicht hat befolgen können.

Indessen hat man doch nunmehr in Frankreich ein solches allgemeines Längenmaaß eingeführt, und dafür den Zehnmilliqnsten Theil des aus den neusten Gradmessungen von Dünkirchen bis Barcellona, welche durch die Hrn. Mechain und Delambre bewerkstelligt worden, abgeleiteten Meridianquadranten angenommen. Diesen angeführten Theil des Meridianquadranten nennt man den Metre und es beträgt diese Längen = Einheit 443, 29 Duodecimallinien des sonst in Frankreich üblich gewesenen, und bey den Gradmessungen in Peru gebrauchten Pariser oder Königlichen Fußes, wenn dieser Fuß die mittlere Temperatur von 16¼ Graden eines Centesimal-Quecksilberthermometers (= 13 Grad Reaum.) hat. Decimetre, Centimetre bedeuten Zehntheilchen, Hunderttheilchen jener Längen-Einheit, so wie denn überhaupt das so bequeme

queme Decimalsystem durchaus bey allen Einheiten in Frankreich jetzt eingeführt ist. Ein Normal-Metre von Platina ist in dem Nationalarchiv niedergelegt. Wenn es verlohren gienge, so kann man es auf alle Fälle wieder durch die Länge des Secunden-Pendels finden, mit dessen genauester Bestimmung die Astronomen auf der Nationalsternwarte noch beschäftigt sind. Zwanzig sorgfältig angestellte Pendelversuche haben vorläufig die Länge des Secunden-Pendels in Paris, auf den Eispunkt reducirt, = 0,99385 Metre gegeben.

v. Zachs Allg. Geograph. Ephemeriden Jul. 1799 in dem Vorberichte S. XXXVI. Sept. 1799. S. 256. Man s. auch die *connoiss. de Tems*. An. X.

Ueber den Metre jenachdem er auf Messing oder Eisen abgetragen wird, einige Bemerkungen von Cammerer in v. Zachs Monatl. Corresp. März 1804. S. 220 rc.

Für einen Geometer ist es wichtig, die verschiedene Größe des Längenmaaßes, welches man einen Schuh oder einen Fuß nennet, an diesem oder jenem Orte zu kennen, d. h. das Verhältniß desselben, zu dem Maaße, dessen er sich gewöhnlich bedient, zu wissen, um erforderlichen Falles, Messungen

ander reduciren zu können. Folgende Tafel stellet die verschiedenen Verhältnisse der Fußmaaße, in Ansehung des ehemaligen Pariser Fußes, der einer der größten ist, vor Augen. Man gedenkt sich hiebey den Pariser Fuß in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, und jede Linie in 100 Theile, also den Fuß in 12. 12. 100 = 14400 gleiche Theilchen abgetheilt.

Wenn

der Leipziger Fuß	12520	
Leyden.	13913	Eisensch.
Lissabonner	13875	Münchk
Londner	13511, 54	Phil. T
= = =	13515, 80	Nach C
= = =	13513, 00	Nach C
Lübecker	12870	
Manheimer	12865	
Mecklenburger	12890	
München.	12825	12938 n
Neapolitaner	11615	Nach A
Nürnberger	13467	Nach W
Osnabrügg.	12375	
Padua.	18990	Christia
Pariser	14400	
Prager	13360	D'Anvi
Regensburger	13900	n. H. P
Rheinländische	13913	Eisensc
= = =	13920	Nach P
= = =	13918, 30	Nach L
= = =	14146	Nach C
Riga.	12160	
Römisch. alter	13090	Mem.
= = =	13060	Nach C
= neuer Palmo	9903	Nach B
Rostocker	12820	Kr.
Rotterdammer	13835	
Russische	23856	
Schwedische	13165	Eisensc
= = =	13160	d'Anvil
= = =	13175	Memoi
= = =	13159	Nach C
Stettiner	12530	
Strasburg.	12820, 8.	Eisensc
Turiner	22770	Nach P
Ulmer	12953	
Venetianische	15400	Christia
= = =	15396	Nach C
Wiener	14011, 7	Nach P
= = =	14012	Nach L
Würtemberg.	12780	Nach T
Zürcher	13300	

. . . . . .	4, 9976043
mid a. a. O. S. 94.	4, 1434207
ausen a. a. O.	4, 1422330
'ransact. 1768. pag. 326.	4, 1307048
Graham (Phil. Trans. V. 52. p. 541)	4, 1308417
elsius (Schwed. Abh. 1740. p. 253)	4, 1307417
. . . . . .	4, 1095785
. . . . . .	4, 1094097
. . . . . .	4, 1102529
ach Hrn. Prof. Heinrich.	4, 1080573
uzout (De la Lande Astr. a. a. O.)	4, 0650191
Wurzelbau (Vid. Eisenschmid p. 95)	4, 1292708
. . . . . .	4, 0928451
ini delle Misure d'ogni Genere 1760	4, 2785250
. . . . . .	4, 1583625
lle Tr. de Mesures itiner. p. 116.	4, 1258065
rof. Heinrich (v. Zachs M. C. 1809 Jun.)	4, 1430148
hm. de Pond. et Mens. a. a. O.	4, 1434207
icard. Ouvrag. adopt. T. IV. p. 313.	4, 1436392
ulofs (De la Lande Astr. a. a. O.)	4, 1435861
elsius Schwed. Abh. 1740. p. 255.	4, 1506336
. . . . . .	4, 0849336
de l'Ac. de Paris an. 1757.	4, 1169396
assini (d'Anville Mes. it. p. 12.)	4, 1159432
oscowich (de la Lande Ar. a. a. O.)	4, 9957668
. . . . . .	4, 1078880
. . . . . .	4, 1409791
. . . . . .	4, 3775976
hmidt de P. et Menss.	4, 1194208
le Mes. Itin. p. 120.	4, 1192559
r. de l'Ac. Paris (an. 1714.)	4, 1197496
elsius Schwed. Abh. 1740. p. 255.	4, 1192229
. . . . . .	4, 0929511
hm. a. a. O. pag. 95.	4, 1079150
. Beccaria (de la Lande Astr.)	4, 3573630
. . . . . .	4, 1123703
ini delle Misure d'ogni Genere.	4, 1875207
elsius Schwed. Abhandl. 1740.	4, 1874078
. Hell (de la Lande)	4, 1464907
iesganig Dimens. Grad. p. 18.	4, 1465000
ob. Mayer Math. Atlas T. II.	4, 1065309
. . . . . .	4, 1238516

Die:

Dieses sind die Verhältnisse der Fußmaaße, so wie ich sie aus angeführten Schriftstellern insgesamt aufs Pariser Maaß reducirt habe. Die mit Kr. bezeichnet sind, habe ich aus Krusens Kontoristen genommen. Bey denen gar kein Schriftsteller angeführt ist, die sind als arithmetische Mittel zwischen solchen Angaben, die ich bey verschiedenen andern Schriftstellern für die wahrscheinlichsten und übereinstimmensten hielte, zu betrachten. Ich glaube daher, daß meine Zahlen von der Wahrheit nicht sehr abweichen werden.

Es ist klar, daß, wenn man von jeder Zahl dieser Tafel die zwey äussersten Ziffern zur Rechten als Decimalstellen abschneidet, die übrigen Ziffern alsdann andeuten, wie viel ganze Pariser Linien auf jeden Fuß gehen. Z. B. der Reinländische = 139, 13 Paris. Lin. = 11 Zoll 7, 13 Lin. Par.

Schriftsteller, die außer den angeführten noch von Verhältnissen der Fußmaaße reden, sind folgende:

C. Arbuthnot's Tables of ancient Coins, Wheigts and Measures (London 1727). *Snellii* Erathostenes Batavus. Lib. 2. *Riccioli* Geographia reformata. Lib. 2. *Ed. Bernard* de mensuris et ponderibus antiquis. Lib. 1. u. s. w.

Auch

Auch körperliche Maaße hängen von der genauen Bestimmung der Längenmaaße ab. Sehr umständlich hievon, so wie auch von den Maaßen der Alten handelt *Paucton's* Metrologie, à Paris 1789. Hieher gehört auch eine Einladungsschrift des Hrn. Prof. Joh. Phil. Ostertags in Regenspurg, Ueber das Verhältniß der Maaße der Alten zu den heutigen Maaßen, und ein bey allen Nationen einzuführendes Eichmaaß nach *Paucton's Metrologie*, mit erläuternden Anmerkungen. 1791.

Romé de l'Isle Metrologie à Paris 1789. 4. Metrologische Tabellen über die alten Maaße, Gewichte Roms und Griechenlands nebst dem Verhalten derselben zu den bekannten französischen und deutschen, nach dem franz. des Hrn. Romé de l'Isle von G. Große. Braunschw. 1790.

Vergleichungen der in den Königl. Preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte von J. A. Eytelwein. Berl. 1798. In den Preuß. Staaten ist seit 1771 der Reinl. Fuß = 1391$\frac{3}{5}$ allgemein eingeführt worden, daher die für einige Preußische Städte in obiger Tafel angegebenen Fußmaaße die vormaligen sind, die man in verschiedenen Rücksichten doch auch kennen muß.

Ons

Onderricht over de Fransche en Hollandsche Maaten en derzelver Vergelyking, met de notige Tafels door *J. H. van Swinden* Amsterd. 1810.

Verhandling over volmaakte Maaten en Gewichten 2 Deelen door *J. H. van Swinden*, Amsterd. 1802.

Heinrich Bestimmung der Maaße und Gewichte von Regensburg in Hrn. v. Zachs Monatl. Corresp. Jun. 1809. (Regensburger Fuß = 129,38 Paris. Lin.)

Chelins Vergleichung der Frankfurther Maaße und Gewichte. Frankf. a. M. 1805.

Gebrauch dieser Tafel.

§. 15. Die Zahlen dieser Tafel, drücken die verschiedenen Größen der Fußmaaße in Absicht des Pariser Fußes aus.

So ist z. E. Paris. Fuß: Reinl. F. = 14400: 13918,30

Vermittelst der angegebenen Verhältnisse läßt sich nun leicht ein Fußmaaß in das andere verwandeln; Ich werde die Art dieser Berechnung jetzt durch ein Exempel erläutern.

Ex. Man frägt, wie viel betragen 125 Reinländische Fuß an Londner Füßen?

Weil aus der Tafel der Reinländische Fuß, sich zum Londner Fuß verhält, wie
13918,30 : 13511,54 so sind

13918,30 Londn. F. = 13511,54 Reinl. F.

also

$$\frac{13918,30}{13511,54} \text{ Londn. F.} = 1 \text{ Reinl. F.}$$

folglich

$$\frac{13918,30}{13511,54} \cdot 125 \text{ Londn. F.} = 125 \text{ Reinl. F.}$$

Um nun dieses zu berechnen, kann man mit Vortheil die Logarithmen gebrauchen,

Die Berechnung wird folgendergestalt geführt:

$$\begin{aligned} \log 13918,30 &= 4,1435861 \\ \log \quad 125 &= 2,0969100 \\ \hline & 6,2404961 \\ \log 13511,54 &= 4,1307048 \\ \hline & 2,1097913 \end{aligned}$$

hierzu gehört die Zahl 128,763; also so viel Londner Fuß machen 125 Reinländische.

Zusatz.

§. 16. Bequemerer Rechnung wegen, habe ich den Zahlen obiger Tafel ihre Logarithmen

rühmen beygefügt, damit man nicht nöthig habe, sie erst in jedem besondern Falle aufzusuchen.

Zusatz.

§. 17. Diese Verwandlung der Fußmaaße in einander ist nöthig, wenn man eine Meßkette, oder einen Maaßstab gebraucht, dessen Fuße, an dem Orte, wo man misset, nicht gewöhnlich sind; denn jedes Land verlangt allemal die Ausmessungen in dem daselbst eingeführten Maaße.

Eintheilungen der Fußmaaße.

§. 18. Um Abmessungen noch in kleinern Theilen als Fußen angeben zu können, theilet der Geometer den Fuß ferner in 10 gleiche Theile, und nennet sie Zolle; der zehnte Theil eines Zolles wird eine Linie, der zehnte Theil einer Linie, ein Scrupel u. s. w. genannt.

Diese Decimaleintheilung hat man durchgängig in der practischen Geometrie eingeführt, und man erhält dadurch besondere Bequemlichkeiten und Vortheile.

Im gemeinen Leben pflegt man sonst auch die zwölftheiligte Eintheilung zu gebrauchen, daß z. E. bey dieser

der Fuß in 12 Zolle
der Zoll in 12 Linien
u. s. w.

eingetheilt wird. Allein diese Eintheilung ist in der Ausübung mehreren Unbequemlichkeiten unterworfen.

Wenn nämlich 1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 144 . 12 = 1728 Scrupel ist, so muß man mit den Zahlen 12; 144; 1728 multipliciren, um Fuße auf Zolle, Linien oder Scrupel zu bringen: und umgekehrt muß man mit diesen Zahlen dividiren, um die niedrigern Einheiten auf die höhern zu bringen.

Ueberhaupt muß man bey der Reduction der höhern Einheiten auf die nächst niedrigern, oder umgekehrt, allemal mit 12 multipliciren oder dividiren, und dieses ist etwas beschwerlich.

Hingegen hat man bey der zehntheiligten Eintheilung der Feldmesser, nur die Multiplication oder Division mit 10 zu verrichten; und dieses ist weit bequemer, als mit 12 solches vorzunehmen. Auch ist die Decimaleintheilung deswegen sehr vortheilhaft, weil die niedrigern Einheiten als Decimalbrüche der höhern ausgedrückt werden können.

Ex. 3 Zoll = $\frac{3}{10}$ Fuß = 0,3 Fuß
253 Lin. = 25,3 Zoll = 2,53 Fuß.

Man bedient sich bey Vermessungen auch der Ruthe, welche von dem Geometer allemahl nach dem Decimalgesetz abgetheilt wird.

An

An einigen Orten werden 12, 15, 16, und mehrere landesübliche Fuße auf eine Ruthe gerechnet.

Ehe also ein Feldmesser an irgend einem Orte Vermessungen anstellet, muß er sich vorher genau erkundigen, was für Fußmaaße daselbst gebräuchlich sind, und wie viel solcher Fuße auf eine Ruthe gerechnet werden. Der Geometer theilt dann eine solche Ruthe allemahl in 10 gleiche Theile, oder Decimalfuße ab.

Die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien u. s. w. werden durch die Zeichen, o, I, II, III u. s. w. angedeutet.

Zusatz.

§. 19. 1) Da bey der Decimaleintheilung der Fuß in 10 Theile; bey der Duodecimal-Eintheilung aber dieselbe Länge, in 12 Theile getheilet wird, so muß man wissen, beyde Eintheilungen auf einander zu reduciren.

2) Da nemlich ein Decimalzoll $\frac{1}{10}$ eines Fußes, und ein Duodecimalzoll $= \frac{1}{12}$ eines Fußes ist; so erhellet von selbst, daß der Decimalzoll größer seyn muß, als der zwölftheiligte, und man kann daher fragen; was eine gewisse Anzahl von Duodecimal-

cimalzollen, an Decimalzollen beträgt und umgekehrt.

3) Diese Aufgabe bequem aufzulösen, dienen folgende Betrachtungen.

Man bezeichne beym Decimalmaaße, die Zolle, Linien, Scrupel, Quarten u. s. w. mit den großen Buchstaben Z, L, S, Q, beym Duodecimalmaaße aber, die ähnlichen Dinge mit den kleinen Buchstaben, z, l, ſ, q u. s. w.

4) So hat man aus dem vorhergehenden erstlich folgende Gleichungen.

1 Fuß = 10 . Z = 12 . z
1 Fuß = 100 . L = 144 . l
1 Fuß = 1000 S = 1728 . ſ
u. s. w.

5) Also $Z = \frac{12}{10}\, z = z + \frac{2}{10}\, z$;
Weil aber z = 12 l ist, so wird
$Z = z + \frac{2}{10}\, 12\, l = z + \frac{24}{10}\, l = z + 2\, l + \frac{4}{10}\, l$
und eben so wegen l = 12 ſ; wird ferner

$Z = z + 2\, l + 4\, ſ + \frac{8}{10}\, ſ$

also endlich, wenn man nur bis auf Quarten gehen will

$Z = z + 2\, l + 4\, ſ + 9{,}6\, q$

6)

6) Nach eben dem Verfahren, wird aus der Gleichung 100 L = 144 l; gefunden
L = l + 5 ſ + 3, 3. q
Und aus 1000 S = 1728 ſ

7) S = ſ + 8, 7 q.

8) So drücken also die gefundenen Formeln, für Z, L, S, u. ſ. w. das Decimalmaaß in Theilen des Duodecimalmaaßes aus.

Will man demnach eine gewisse Menge von Decimalzollen, u. ſ. w. in Duodecimaltheile verwandeln, so braucht man nur, die Ausdrücke rechter Hand der Gleichheitszeichen in den Formeln für Z, L, S, mit der gegebenen Zahl von Decimalzollen u. ſ. w. zu multipliciren.

Ex. Man soll 9 Z + 8 L + 4 S auf die Duodecimal-Eintheilung bringen: so ist

9Z = 10 z + 9 l + 7 ſ + 2, 4. q aus (5)
8L = 11 l + 6 ſ + 2, 4. q aus (6)
4S = 6 ſ + 10, 8. q aus (7)

also

9Z + 8 L + 4 S = 11 z + 9 l + 8 ſ + 3, 6. q

oder

9 Dec. Zoll + 8 Dec. L. + 4 Dec. S. machen 11 Duod. Z. + 9 Duod. L. + 8 Duod. S. + 3, 6 Duod. q

Dies

Dies ist die bequemste Methode die Decimal-Eintheilung auf die zwölftheiligte zu bringen.

Zusatz.

§. 20. Man kann sich aber auch folgender Methode bedienen:

Weil 1000 Decimal Sc. = 1728 Duodecimal-Scrup. so schliesse man nach der Regel detri für die Zahlen des vorigen Exempels

$$1000\ S : 1728\ \mathfrak{f} = 984\ S : x\ \mathfrak{f}$$

also

$$x = \frac{1728 \cdot 984}{1000}$$

Man muß also hier im Zähler die beyden Zahlen 1728; 984 mit einander multipliciren, und vom Produkte drey Decimalstellen abschneiden. — Man kann aber auch, um den Werth x zu berechnen, sich der Logarithmen bedienen

$$\begin{array}{l} \log 1728 = 3,2375437 \\ \log \ \ 984 = 2,9929951 \\ \hline \qquad\qquad\quad 6,2305388 \\ \log 1000 = 3. \\ \hline \quad \log x = 3,2305388 \\ \quad \text{also } x = 1700 \end{array}$$

folglich

$984 S = 1700 \mathfrak{f} = 11 z + 9 l + 8 \mathfrak{f}$; wie vorhin (§. 19) wenn man nämlich die 1700 f durch

eine

eine fortgesetzte Division mit 12 auf die höhern Einheiten bringt.

Zusatz.

§. 21. So kann man auch umgekehrt die Duodecimal-Eintheilung auf die Zehntheiligte bringen.

Denn aus 10. Z = 12. z folgt

$\frac{10}{12}$. Z = z oder

$\frac{10}{12}$. 10 L = z. Wenn man nun so weiter fortgehet und L durch 10 S; S durch 10 Q u. s. w. ausdrückt, so findet sich endlich

$$z = 8L + 3S + 3,3Q$$

und aus 100 L = 144 l

wird $l = 6S + 9,4Q$

und aus 1000 S = 1728 ſ findet sich

$$ſ = 5,7Q$$ u. s. w.

Der Gebrauch dieser Formeln ist der nemliche, wie in §. 19.

Ex. Gesetzt man habe 8z + 3l + 5ſ ins Decimalmaaß zu verwandeln, so wird

$$\begin{aligned} 8z &= 6Z + 6L + 6S + 6,4Q \\ 3l &= 2L + 0S + 8,2Q \\ 5ſ &= 2S + 8,5Q \end{aligned}$$

also $8z + 3l + 5ſ = 6Z + 9L + 0S + 3,1.Q$

Zus-

Zusatz.

§. 22. So erhellet, wie man sich überhaupt Formeln, für jede beliebige Eintheilung des Fußmaaßes verfertigen könne. Es würde aber sehr überflüssig seyn, auch die Reduction anderer Eintheilungen auf die Zehntheiligte hieher zu setzen.

Zusatz.

§. 23. Es kann vorkommen, daß an einem gewissen Orte, wo ein Feldmesser misset, nicht allein die Eintheilung, sondern auch die Größe des Fußmaaßes, von demjenigen unterschieden ist, dessen sich der Feldmesser gewöhnlich zu bedienen pflegt. Wie man also in solchem Falle die Reduction anstellen müsse, wird folgendes Beyspiel weisen.

Gesetzt man soll finden, was $5'\ 1''\ 2'''$ reinländisches Decimalmaaß, an Londner Duodecimalmaaß beträgt. Hier verwandele man also erstlich die $5'\ 1''\ 2'''$ oder 5,12 Reinländische Fuß in Londner nach §. 15.

log 13918,30	=	4,1435861
log 5,12	=	0,7075702
Summa	=	4,8511563
abzuziehen log 13511,54	=	4,1307048
Rest	=	0,7204515

Zu diesem Logarithmen 0,7204515 gehört nun die Zahl 5,253 oder so viel Londner Fuß betragen 5,12 Reinländische.

Diese gefundenen 5,253 Londner Fuß sind aber Decimaltheile, und bedeuten, wenn man den Londner Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien u. s. w. eintheilt, soviel als, 5 Fuß 2 Zoll 5 Lin. 3 Sc. oder nach der bisherigen Bezeichnung 5 F + 2 Z + 5 L + 3 S. ... Diese Größe muß nun noch nach §. 19 ins Duodecimalmaaß verwandelt werden, wie folget.

$5F = 5f$

$2Z = 2z + 4l + 9.\mathfrak{l} + 7,2.q$

$5L = 7l + 2.\mathfrak{l} + 4,5\,q$

$3S = 5.\mathfrak{l} + 2,1\,q$

also

$5F + 2Z + 5L + 3S = 5f + 2z + 11l + 16\mathfrak{l} + 13,8.\,q$

weil man aber für jede 12 q ein $\mathfrak{l}$, für jede 12 $\mathfrak{l}$ ein l u. s. w. setzen kann, so wird auch

$5F + 2Z + 5L + 3S = 5f + 3z + 0.l + 5.\mathfrak{l} + 1\,8.\,q$

folglich sind $5'\ 1''\ 2'''$ Reinl. Dec. $=$ $5'\ 2''\ 5'''\ 3''''$ Londn. Dec. Maaß oder $=$ $5'\ 3''\ 0'''\ 5''''\ 1'''''$, 8 Londner Duodec. M.

Anmerkung.

§. 24. In §. 19. 1. waren sowohl bey der zehen- als zwölftheiligten Eintheilung, die Füße gleich groß angenommen worden; und dadurch wurden bey der zwölftheiligten Einthei-

lung

lung blos die Zolle, Linien, u. s. w. kleiner, als bey der Zehntheiligten.

Nähme man aber die Ruthen gleich groß, und theilte diese einmal in 10 und dann in 12 Theile oder Fuße, so würden bey der zwölftheiligten Eintheilung, selbst schon die Fuße kleiner seyn, als bey der Zehntheiligten.

In diesem Falle würde also schon für die Fuße eine Reduction nöthig seyn. Indessen werden die obigen Formeln §. 19. mit einer kleinen Veränderung auch alsdann noch gelten. Denn nennet man itzt den Decimalfuß = F den Duodecimalfuß = f, so wird, weil die Ruthen gleich groß angenommen werden,

1 Ruth = 10 F = 12 f.
100 Z = 144 z
1000 L = 1728 l
u. s. w.

Mithin nach eben dem Verfahren §. 19.

F = f + 2z + 4l + 9,6. f
Z = z + 5l + 3,3. f
L = l + 8,7. f
u. s. w.

Anmerkung.

§. 25. Da wir itzt gerade mit Verwandlung der Längenmaaße beschäftiget sind, so wird es Zusammenhangs wegen nicht undienlich seyn, auch

auch die Verwandlung der Flächenmaaße in einander, hier kurz zu erläutern.

Es ist bekannt, daß zu Ausmessung der Flächen auch eine gewisse Fläche zum Maaß angenommen werden müsse, und daß dieses Maaß die Fläche eines Quadrats sey, dessen Seitenlinie von einem bekannten Längenmaaße ist. Ist sie nur einen Fuß lang, so heißt dieses Quadrat alsdann ein Quadratfuß. Ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe lang ist, wird eine Quadratruthe genannt, und so erhellt die Bedeutung der Quadratzolle, Quadratlinien u. s. w. Ist ferner eines Quadrats Seite = 1 Duodecimalfuß, so heißt das Quadrat ein Duodecimalquadratfuß. Ist aber die Seite desselben = 1 Decimalfuß, so wird das Quadrat dieser Seite ein Decimalquadratfuß genannt. Und so wird man leicht verstehen, was Duodecimalquadratzolle, Duodecimalquadratlinien u. s. w. bedeuten. Nun erhellet, wenn die Seitenlinie einer Quadratruthe in 10 Decimalfüße getheilet wird, daß die Quadratruthe 10 . 10 oder 100 Decimalquadratfuße und eben so der Quadratfuß 10 . 10 oder 100 Quadratzolle u. s. w. enthalten müsse.

Hingegen bey der zwölftheiligten Eintheilung wird die Quadratruthe 12 . 12 oder 144 Duodecimalquadratfuß, der Duodecimalqua-

dratfuß 144 Duodecimalquadratzolle u. s. w. enthalten.

Zusatz.

§. 26. 1) Bezeichnet man daher die Decimalquadratfuße, Zolle, Linien 2c. mit F^2, Z^2, L^2, u. s. w. Beym Duodecimalmaaße aber die ähnlichen Dinge mit f^2, z^2, l^2 u. s. w. so hat man nach dem vorhergehenden §. folgende Ausdrückungen.

2) 1 Quadratruthe $= 100\,F^2 = 144\,f^2$
oder (wegen $F^2 = 100\,Z^2$; $f^2 = 144\,z^2$)
$100 \cdot 100\,Z^2 = 144 \cdot 144\,z^2$

3) und (wegen $Z^2 = 100\,L^2$; $z^2 = 144\,l^2$)
$100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot L^2 = 144 \cdot 144 \cdot 144\,l^2$
u. s. w.

4) Mithin wenn man würklich multipliciret

$$100\,F^2 = 144 \cdot f^2$$
$$10000\,Z^2 = 20736 \cdot z^2$$
$$1000000\,L^2 = 2985984 \cdot l^2$$
$$100000000\,S^2 = 429981696 \cdot s^2$$

u. s. w.

5) Daher aus $100\,F^2 = 144\,f^2$ erhält man

$$F^2 = \tfrac{144}{100} f^2 = f^2 + \tfrac{44}{100} f^2 = f^2 + \tfrac{44}{100} \cdot 144\,z^2$$
$$= f^2 + 63\,z^2 + \tfrac{36}{100} z^2$$
$$= f^2 + 63\,z^2 + \tfrac{36}{100}\, 144\,l^2 =$$
$$f^2 + 63\,z^2 + 51\,l^2 + \tfrac{84}{100} l^2$$
$$= f^2 + 63\,z^2 + 51\,l^2 + \tfrac{84}{100} \cdot 144\,s^2 =$$
$$f^2 + 63\,z^2 + 51\,l^2 + 120{,}9\,s^2$$

Völ-

Völlig nach eben dem Verfahren findet sich aus den übrigen Gleichungen in (4)

$$Z^2 = 2z^2 + 10l^2 + 86,1 \ldots f^2$$
$$L^2 = 2l^2 + 141,9 \ldots f^2$$
$$S^2 = 4,3 \ldots f^2$$

Wenn es nöthig ist, kann man die Zahlen, womit die Duodecimalquadratscrupel multipliciret sind, noch weiter, als bis auf die erste Decimalstelle berechnen.

Ex. Gesetzt man wolle nun z. E.

$4F^2 + 9Z^2 + 20L^2$ ins Duodecimalquadratmaaß verwandeln; Um dieses zu finden, multipliciret man in der Gleichung $F^2 = f^2 + 63z^2 + 51l^2 + 120,9f^2$ auf beyden Seiten mit 4; Hierauf die folgende Gleichung $Z^2 = 2z^2 + 10l^2 + 86,1f^2$ auf beyden Seiten mit 9, u. s. w. so giebt dieses folgende Werthe:

$$4F^2 = 4f^2 + 252z^2 + 204l^2 + 483,6f^2$$
$$9Z^2 = 18z^2 + 90l^2 + 774,9f^2$$
$$20L^2 = 40l^2 + 2838,0f^2$$

Die Zahlen, die nun rechter Hand unter einander zu stehen gekommen, zusammenaddirt, und für jede $144f^2$ ein l^2, für jede $144l^2$ ein z^2 für jede $144z^2$ ein f^2 gesetzt, geben $4F^2 + 9Z^2 + 20L^2 = 5f^2 + 128z^2 + 74l^2 + 64,f^2$ und so erhellet, wie überhaupt eine vorgegebene Anzahl von Decimalquadratfußen, Zollen, Linien,

mien, in Theile des Duodecimalmaaßes verwandelt werden könne.

Anmerkung.

§. 27. Mit etwas weitläuftigerer Rechnung liessen sich die $4F^2 + 9Z^2 + 20L^2$, auch auf folgende Art ins Duodecimalmaaß verwandeln.

Man überlege, daß $4F^2 + 9Z^2 + 20L^2 = 40920 L^2 = 4092000 S^2$ ist; Weil nun §. 26. $100000000 S^2 = 429981696. f^2$ so schliesse man nach der Regel Detri $100000000 S^2$ geben $429981696. f^2$, was geben $4092000 S^2$ an Duodecimalquadratscrupeln; Man setze die 4te Proportionalzahl $= x. f^2$ oder x Duodecimalquadratsc. so wird x durch Logarithmen auf folgende Art gefunden:

log 4092000	= 6,6119356
log 429981696 = 4 log 144	= 8,6334500
	15,2453856
Subtr. log 100000000	8,0000000
giebt log x =	7,2453856

Da nun dieser Logarithme nicht unmittelbar in den gewöhnlichen Tafeln stehet, so vermindere man die Characteristik um 4 Einheiten, und suche in den Tafeln die Zahl, deren Logarithme 3,2453856 ist. Die zugehörige Zahl multiplicire

plicire man alsdann mit einer 1 mit 4 Nullen, oder mit der Zahl 10000 so hat man x.

Wenn ich nun nach den gewöhnlichen Regeln die dem Logarithmen 3,2453856 zugehörige Zahl suche, so finde ich sie = 1759,4850; also mit 10000 multiplieirt, x = 17594850. Also 4092000 Decimalquadratsc. = 17594850 Duodecimalquadratst. Diese letztere Anzahl von Duodecimalquadratsc. kann man nun durch fortgesetzte Divisionen mit 144 auf Quadratlinien, Zolle und Füße reduciren.

Zusatz.

§. 28. Weil $100 F^2 = 144 f^2$ ist, so wird $f^2 = \frac{100}{144} F^2 = 0,694444 F^2 = \frac{69}{100} F^2 + \frac{44}{10000} \cdot F^2 + \frac{44}{1000000} F^2 = 69 Z^2 + 44 L^2 + 44,4 S^2$;
wenn man nämlich statt
$\frac{1}{100} F^2$; $\frac{1}{10000} F^2$; $\frac{1}{1000000} F^2$
die gleichgültigen Werthe, Z^2; L^2; S^2 setzet.

Völlig eben so wird, wegen
$\frac{10000}{20736} Z^2 = z^2$, oder wegen $0,482253 Z^2 = z^2$
der Werth von
$z^2 = 48 L^2 + 22 S^2$
und endlich wegen $\frac{1000000}{2985984} L^2 = l^2$ erhält man $l^2 = 33 S^2$

Die gefundenen Formeln dienen, umgekehrt das Duodecimalquadratmaaß ins zehntheiligte zu verwandeln.

Anmerkung.

§. 29. Das bisherige mag von Verwandlung der Maaße genug seyn. In der Folge werden wir Gelegenheit haben, mehreres von andern im gemeinen Leben eingeführten Maaßen zu reden, nach denen man die Flächeninhalte der Ländereyen, Holzungen u. s. w. anzugeben pflegt.

Meilenmaaße.

Da geometrische Charten sehr oft zur Verfertigung der geographischen mit gebraucht werden, und überhaupt Vergleichungen von Längenmaaßen mit zur practischen Geometrie gehören, so ist es nützlich, auch von den in der Geographie und im gemeinen Leben eingeführten Meilenmaaßen, Kenntnisse zu haben.

Daß die sogenannte Meile römischen Ursprungs sey, zeigt schon die Benennung Milliare. Dies Längenmaaß begriff 1000 Schritte, jeden zu 5 alten römischen Schuhen, oder auch 8 Stadien, jede zu 125 Schritten, in sich. Dies giebt nach dem Verhältniße des alten römischen Schuhes zum Pariser (S. obige Tafel) nemlich 1309 : 1440 für diese Meile 4545,13 paris. Fuß, oder 757,52 Toisen. (de la Lande Astron. L. XV. 2639). Nach Strabo's Angaben bestimmt Hr. Cassini diese

Meile

Meile auf 766 Toisen. (Mem. de l'Ac. de Paris. 1702.)

Die neuern Europäer haben ihre Meilen viel größer angesetzt, und bald diesen bald jenen aliquoten Theil des mittleren Meridian-Grades auf der Erde dafür angenommen. Die vermuthlich nach den Niederdeutschen Schiffern oder Geographen so genannte deutsche oder auch geographische Meile macht den 15ten Theil eines mittleren Meridiangrades, also 3807,2 Toisen, oder nach Hrn. Pr. Klügels Bestimmung (S. unten §. 117) 3811,6 Toisen. Diese geographischen oder deutschen Meilen werden aber fast nirgends im gemeinen Leben gebraucht, und die in Deutschland üblichen Meilen, weichen insbesondere bald mehr bald weniger von jenen ab. Man scheint so viel auf eine Meile gerechnet zu haben, als ein guter Fußgänger in zwey Stunden gehen kann (Kepler Tab. Rudolph. Cap. 16) woher denn die so große Verschiedenheit der Meilen in den deutschen Provinzen entstanden seyn mag. Die italienische Meile ist der 60ste Theil eines Meridiangrades. Die französischen Schiffer nehmen den 20sten Theil eines Grades für eine Seemeile, zu Lande bedient man sich in Frankreich der Lieue, deren 25 auf einen Grad gehen. Englische Meilen gehen beynahe 69 auf einen Grad. Hier ist im Zusammenhange eine Tafel für die vorzüglichsten Meilenmaaße, wobey die mittler-

Meridianmeile zu 2811,6 Toisen, oder zu 23611 Reinl. Schuhen, oder zu 4000 geogr. oder geometrischen Schritten, angenommen worden ist (§. 117. I.)

Meilen, deren Benennung und Grundmaaße.	Enthalten reinl. Schuhe	Gehen auf 1 Grad od. 15 geogr. M.
Arabische - - - -	6263	56,67
Armenische, Farsang = 30 griechischen Stadien = 3 Röm. Meil. - - -	14197	25,00
Bayrische, kleine Meile	25000	14,15
: : große - -	40800	8,69
Böhmische zu 3545 Tois.	22017	16,12
Burgundische zu 1500 reinl. Rut	18016	19,70
Chinesische neue Li -	1835	193,40
Churbraunsch. Polizey: M. = 2811,4 reinl. Ruthen	33737	10,52
Dänische = 12000 dän. Ell. à 2 reinl. Schuhen -	24000	14,79
Deutsche, alte, Rasta = 3 röm: Meilen - -	14197	25,00
neue kleine - -	20000	17,74
geographische zu 4000 Schritt	23661	15,00
Egyptische Schönus zu 60 egypt. Stadien - -	18779	18,90
Flandrische - - - -	20000	17,74

Fran:

Französische, alte gallische Leuka oder Lewa = 1, 5 röm. M.	7042	59,50
neue Lieue = 2400 geogr. Schr	14197	25,00
Seemeile = 3000 Schritte	17745	20,00
Grosbrittann. alte brittische = 12 Quarantenä =	7456	47,60
neue engl. zu 1760 Yard -	5135	69,12
Seemeilen - - -	5915	60,00
Leagues - - -	17445	20,00
Hamburgische - -	24000	14,79
Hessische - - -	31440	11,29
Holländische - -	18680	19,00
Irrländische = 1500 geog. Schr	6536	54,30
Italienische = 1000 geogr. Schr	5915	60,00
Jüdische, alte, Sabatherweg zu 2000 jüdisch = biblische Ellen	3521	100,80
Litthauische - -	28530	12,44
Londner von 1666⅔ Yards	4862	73,00
Niederländische, Stunden -	18943	19,67
= = = Seemeilen	17745	20,00
Nürnbergische - -	27000	13,10
Oesterreichische - -	47500	7,48
Persische, Farlang, - -	15774	22,50
Polnische = 1 Seemeile	17745	20,00
Portugiesische - -	19717	18,00
Preußische zu 1800 Danz. Ruth.	24700	14,37
Römische, gewöhnl. zu 8 olympischen Stadien -	4701	75,50
Russische, Wersta, = 1500 Archinen - -	3402	104,3

Sächsische, Polizey M. zu 16000 Dresdner Ellen -	28878	12,29
Schlesische zu 11250 Schles. Ell.	20658	17,18
Schottländische zu 1147 Toiss.	7119	49,85
Schwäbische - - -	29560	12,00
Schwedische zu 18000 Ell.	34094	10,41
Schweizerische - -	26688	13,30
Spanische, zu 5000 Varas oder 2147 Toisen - -	13328	26,63
Stadien, oder Feldwege		
1) griechische, olympische = 100 Orgy - -	591	600,0
2) See-Stadien -	473	750,0
3) egyptische - -	315	1125
Türkische, Berri, - -	5323	66,67
= = Seemeile - -	4179	86,40
Ungarische - - -	26625	13,33
Westphälische - - -	36300	9,77

Schriften, in welchen noch mehrere Meilenmaaße vorkommen, sind, ausser den oben angeführten, noch

Gatters Abriß der Geographie. Göttingen, 1775. S. 21.

J. Elert Bode Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel. Berlin, 1786. §. 244.

Anleitung zum Aufnehmen und Zeichnen der Gegenden, verfer-

tigt

tigt von einem Officier. Göttingen, 1783. S. 302.

Der allgemeine kleine Contorist, oder tabellarisches Verzeichniß und Vergleichung aller, besonders Europäischen Maaße und Gewichte. Erfurt, 1791. S. 292.

Schulzens elementarische Erläuterung der Meilencharte. Halle, 1785.

Vergleichung der gewöhnlichsten Maaße, Gewichte und Münzsorten v. J. C. W. Dresden, 1787. u. a.

Auch kann in diesen Schriften noch mehreres von Fußmaaßen nachgelesen werden.

III. Kapitel.

Von der würklichen Ausmessung gerader Linien, auf dem Felde.

§. 30. Wenn auf dem Felde zwischen zwey vorgegebenen Punkten eine gerade Linie gemessen werden soll, so ist es nöthig, daß man diese Punkte, wenn sie nicht sonst schon kenntlich sind, vorher durch gewisse Merkmahle bezeichne, oder abstecke, damit die Richtung oder Lage der auszumessenden geraden Linie angegeben werde.

Nun erhellet aber aus demjenigen, was ich oben §. 7 gesagt habe, daß man in der Feldmeßkunst meistens immer, wenn es nicht besondere Absichten erfordern, nur den horizontalen Abstand zweyer Punkte verlangt; das will sagen, man stellet sich durch die beyden Endpunkte einer Linie, ein paar Verticallinien vor, und bestimmt die horizontale Entfernung zwischen beyden.

Da aber auf dem Felde die beyden Punkte, deren Entfernung man wissen will, oft so weit von einander liegen, daß man bey dem

einen, den andern entweder nicht deutlich, oder wegen dazwischen liegender Hindernisse gar nicht sehen, und auf ihn geradezu messen kann, so erhellet, daß man nothwendig vorher zwischen den beyden äussersten Punkten einer auszumessenden Linie andere bestimmen müsse, die mit jenen in einer und derselben Verticalfläche liegen. Dieses nennen die Feldmesser eine gerade Linie abstecken.

Bestimmter zu reden, sollte es heißen, eine Vertical-Ebene abstecken, in der sich die beyden Punkte befinden, deren horizontalen Abstand man messen will.

Dies ist also in der Feldmeßkunst nothwendig, ehe man zur unmittelbaren Ausmessung schreiten kann. Ich werde nun zuerst die zur Absteckung der Verticalflächen erforderlichen Werkzeuge kürzlich beschreiben.

Werkzeuge zur Absteckung gerader Linien oder Verticalflächen.

§. 31. Hiezu sind 5 bis 6 Fuß hohe, und ohngefähr 1 bis 2 Zoll dicke, gerade cylindrische Stangen, von guten trockenen und dauerhaften Tannen- oder Buchenholze erforderlich. Sie sind unten mit eisernen Spitzen oder Stacheln versehen, damit man sie in den Boden befestigen könne. Man nennet diese

Stangen Absteckstäbe, Fluchtstäbe, oder auch schlechtweg Stäbe. Um sie in der Ferne gut erkennen zu können, kann man sie mit einer weißen Oelfarbe anstreichen lassen.

Bugge in seiner Gründlichen und vollständigen theoretisch-practischen Anweisung zum Feldmessen, oder zur practischen Geometrie aus dem Dänischen von Herrmann Tobiesen Altona 1798. S. 47. räth solche Stäbe mit abwechslenden Streifen oder Zonen von der Länge eines Fußes, schwarz und weiß anzumahlen. Auf grünen Wiesen, gegen Waldungen und niedriges Gebüsch sey dann der weiße Theil des Stabes am sichtbarsten, und gegen weiße Häuser, reife oder bereits abgemähte Aecker und andere helle Gegenstände, sehe man die schwarze Farbe am deutlichsten.

Meßfahnen, sind ebenfalls Stangen von gutem Holze, unten mit einer Spitze beschlagen, und an ihrem oberen Ende mit einer ausgespannten Leinewand oder Fahne versehen. Man macht sie wohl 10 und mehrere Fuß hoch, um sie über niedriges Gebüsche und Anhöhen hervorragen zu lassen, und erkennen zu können.

Zeichenstäbe sind kleine 8 bis 12 Zoll lange und ½ bis ¾ Zoll dicke, unten etwas zuge-

gespitzte und mit Eisen beschlagene Stäbchen, um damit Punkte auf dem Felde bezeichnen zu können.

Man kann ihr oberes Ende mit einem Spalt versehen, um in solchen zu gewissen Absichten ein Kartenblatt, oder ein Papier mit einer Nummer stecken zu können.

Der Vorrath von Absteckstäben, und Meßfahnen, richtet sich offenbar nach der Weitläufigkeit einer Vermessung. Indessen darf man doch wohl nicht weniger, als etwa 6 Absteckstäbe, und ein paar Fahnen besitzen.

An einer hinlänglichen Menge von Zeichenstäbchen darf es aber nicht fehlen. Man trägt und verwahrt sie am besten in einem besonders dazu verfertigten ledernen Sacke, oder auch in einer blechernen Kapsel die man umhängen kann.

Aufgabe.

§. 32. Eine Verticalebene auf dem Felde abzustecken, oder eine bereits abgesteckte so weit man will, zu erweitern.

Aufl. 1) Gesetzt A und E (Fig. V.) seyen auf dem Felde ein paar Punkte, durch die man eine Verticalebene abstecken wolle.

Um dieses zu wissen, hat man weiter nichts nöthig, als nur in A und E ein paar Absteckstäbe vertical in den Boden zu befestigen, welches man vermittelst eines längst sie herabhängenden Lothes oder nach dem Augenmaaße bewerkstelligen kann.

Arbeitet man auf ebenem Lande, so kann die entfernte Horizontgränze sehr gut dazu dienen, die Stäbe vertical zu stecken. Man steckt die Stäbe so, daß sie mit dieser Gränze nach dem Augenmaaße rechte Winkel machen.

Eine ebene Fläche, die man sich solchergestalt durch die Richtung der Stäbe AB, EF gelegt vorstellet, wird eine Verticalfläche seyn.

II) Soll in eine Verticalebene, wie ABEF, bey C zwischen A und E, eine dritte Stange CD eingesetzt werden, so lasse man einen Gehülfen nach C hingehen, mit dem Unterrichte, daß, wenn er in die Gegend von C angekommen, er daselbst einen Absteckstab frey und in verticaler Richtung zwischen zween Fingern herunter hängen lasse, und auf ein gegebenes Zeichen oder Winken, sich rechts oder links bewege.

Ist nun der Gehülfe bey C angekommen, so tritt man zwey bis drey Schritte hinter die erste Stange AB, zielet oder visiret mit dem Auge längst AB und EF vorbey,

und

und untersuchet, ob der in der Gegend bey C von dem Gehülfen senkrecht in der Hand herunter gehaltene Stab, rechts oder links von der durch AB und EF eingebildeten Verticalebene abweiche; Geschicht dieses, welches sich denn in der That sehr leicht erkennen läßt, so giebt man dem Gehülfen ein Zeichen, sich rechts oder links mit seiner frey herabhangenden Stange fortzubewegen, bis er endlich bey C die Stange so hält, daß die längs AB und EF hinausstreichende Ziellinie des Auges auch an CD vorbeygehe, oder nach dem gemeinen Sprachgebrauche der Feldmesser, bis alle drey Stangen AB, CD, EF einander zu decken, d. h. dem Auge, welches sich hinter AB befindet, gleichsam nur eine einzige auszumachen scheinen.

Alsdann liegen AB, CD, EF, wo nicht völlig genau, doch wenigstens ohne großen Fehler, in einer einzigen Verticalebene.

Hierauf giebt man dem Gehülfen, nach der geschehenen Verabredung ein Zeichen, in der letztern verticalen Richtung, die Stange CD senkrecht, vermittelst eines längs ihr herabhängenden Lothes, in den Boden zu befestigen.

III) Soll in eine abgesteckte Verticalebene, wie ABEF, ausserhalb A und E z. E. in der Gegend bey G, ein Stab eingesetzt, d. h.

die

die erwähnte Verticalebene bis G verlängert werden, so darf nur der Gehülfe bey G an seinem Stabe GH, den er gerade vor sich hält, hinausvisiren und sehen, ob er die übrigen EF, CD, AB decke, und wenn dieß geschieht, ihn bey G feststecken. Solchergestalt können so viel Stäbe, als man will, in eine und dieselbe Verticalebene gebracht werden, d. h. man kann sie, so weit man will, erweitern, nur muß man, damit die Dicke des Stabes, hinter dem man zunächst steht, nicht im Visiren hinderlich falle, das Auge allemal, so weit man kann, von dem Stabe weghalten.

Wenn eine Verticalebene sehr weit hinaus erweitert werden soll, so geschiehet es oft, daß man mit der vorhandenen Anzahl von Stäben nicht ausreichet; In diesem Falle kann man von den in der Mitte bereits eingesetzten wieder einige ausziehen, und statt ihrer etwa 2 Fuß hohe Pfähle einschlagen lassen. Mit diesen Stäben kann man alsdann die Arbeit weiter fortsetzen, und solchergestalt eine Verticalfläche, so weit man will, erweitern.

Nur verstehet sich, muß man bey diesem Verfahren, von den bereits eingesetzten Stäben wenigstens allemal die beyden letzten EF, GH stehen lassen, damit, wenn man mit dem Abstecken von A bis G gekommen ist, man alsdann durchs Visiren längst EF, GH, und durch

durch Hülfe der ausgezogenen Stäbe, die Verticalfläche EFGH weiter fortsetzen könne.

IV) Wenn Fig. VI. sich zwischen A und E auf dem Felde ein Hinderniß z. E. ein Hügel befände, oder A wäre von E so weit entfernt, daß man bey A den Punkt E entweder gar nicht, oder nur sehr undeutlich erkennen könnte, so frägt sich, wie man in solchem Falle zwischen A und E Stäbe in die Verticalebene AE bringen könne.

Um diesen und ähnliche Fälle aufzulösen, dient folgender Grundsatz:

Wenn die Buchstaben α, β, γ, δ, ε, η u. s. w. auf dem Felde, nach der Ordnung gewisse Punkte, in die z. E. Stäbe eingesetzt worden, vorstellen, und es sind die Punkte oder Stäbe

α, β, γ,
β, γ, δ,
γ, δ, ε,
δ, ε, η,
u. s. w.

je drey für sich in einer Verticalebene, so müssen auch alle Punkte α, β, γ, δ, ε, η in einer und derselben Verticalebene liegen.

Dieses zum vorausgesetzt, wird man zwischen A und E, auf folgende Art Stäbe in eine Verticalebene bringen können.

Man wähle zwischen A und E einen Punkt C, wo man A und E zugleich sehen kann, und setze daselbst einen Stab senkrecht in den Boden.

Es wird gut seyn, C so anzunehmen, daß der daselbst eingesetzte Stab, wenigstens nach dem Augenmaaße zu schätzen, sich beyläufig in der Verticalebene AE befinde.

Hierauf lasse man von einem Gehülfen zwischen A und C eine Stange B in die Verticalebene AC, und eben so von einem andern Gehülfen auch bey D eine Stange in die Verticalebene CE einsetzen.

So hat man hier 5 Stäbe oder Punkte A, B, C, D, E; von denen sind also

A, B, C

C, D, E

jede drey für sich, in eine Verticalfläche gesetzt worden; wären nun auch die drey mittelsten B, C, D, in einer Ebene, so erhellet aus dem angeführten Grundsatze, daß alsdann alle 5 Stäbe oder Punkte A, B, C, D, E, sich in einer und derselben Verticalebene befinden würden; und die Aufgabe würde also aufgelöset seyn.

Da aber nicht zu erwarten ist, daß die sich anfangs bey C ausgesetzte Stange, sich in

in der That in der Verticalebene BD befinden wird, so lasse man den Gehülfen bey D visiren. Bemerkt dieser, daß die drey Stäbe B, C, D einander nicht decken, so ziehe man die Stange C aus, und bringe sie nach c in die Verticalebene BD.

Weil aber anfangs A, B, C und C, D, E jede drey für sich in einer Ebene lagen, so wird, weil nun der Stab C nach c hingekommen ist, B nicht in der Verticalebene Ac, und eben so D nicht in der Verticalebene Ec sich befinden können.

Man lasse also die Stäbe B, D, ausziehen, und den erstern B nach b in die Verticalebene Ac, den andern D aber nach d in die Verticalebene cE hinbringen.

Durch diese Operation kommen also die Stäbe in folgende Lage A, b, c, d, E, von denen sind itzt wieder

A, b, c,
c, d, E,

jede drey für sich, in einer Ebene. Wären daher itzt auch die drey mittelsten b, c, d in einer Ebene, so würden alle 5 Stäbe oder Punkte A, b, c, d, E, in einer einzigen Verticalebene stehen.

Man visire also bey d: Findet sich, daß am Ende der bisher vorgenommenen Opera=

tion, c nicht mit b und d in einer Verticalebene steht, so muß man wieder eine neue Operation anfangen, und nach dem gewiesenen Verfahren wiederum

1) die 3te Stange mit der 2ten und 4ten

2) dann die 2te mit der 1ten und 3ten

3) und hierauf die 4te mit der 2ten und 5ten

jede drey für sich, in eine Verticalebene bringen, und die Arbeit auf diese Art so oft wiederhohlen, bis endlich die Stäbe eine solche Lage, wie A, β, γ, δ, E erhalten, in der nicht allein A, β, γ, und γ, δ, E sondern auch die mittelsten β, γ, δ jede drey für sich in einer Ebene zu liegen kommen. Alsdann werden alle 5 Stäbe A, β, γ, δ, E in einer und derselben Verticalebene stehen.

V) Daß man vermittelst dieses Verfahrens endlich seinen Zweck erreiche, erhellet daraus, weil nach einer jeden Operation, die drey mittelsten Stäbe immer näher in die Verticalfläche AE kommen, bis sie sich endlich völlig genau in ihr befinden.

VI) Das bisherige Verfahren würde mit Vortheil in dem Falle gebraucht werden können, wenn zwischen den beyden äussersten Punkten oder Objecten A und E z. E. ein Hügel läge. Dann würde man natürlicherweise mit der Stange C auf die Spitze des Hügels gehen, von der man A und E zugleich sehen kann.

VII)

VII) Wäre der Hügel von C gegen A, und von C gegen E sehr abhängig, so wird man in diesem Falle, die Stäbe B, D, oft sehr nahe bey C annehmen müssen, weil man sonst bey B die Stange D wegen der dazwischen befindlichen Anhöhe nicht würde sehen können.

Bey einem solchen Geschäfte ist es vortheilhaft, einige sehr hohe Absteckstäbe bey der Hand zu haben, damit man nicht nöthig habe, die Stäbe gar zu nahe neben einander abzustecken. Aber dann muß um so mehr auf eine genaue lothrechte Richtung derselben gesehen werden, weil man dann oft genöthigt ist, an ihrem obern Ende vorbey zu visiren. M. s. den folgenden §.

VIII) Läge zwischen A und E eine Holzung, so würde sich zwischen diesen Punkten sehr selten ein Punkt C annehmen lassen, von dem man nach A und E, wie bey dem bisherigen Verfahren zum vorausgesetzt wird, zugleich hinsehen könnte. In diesem Falle würde sich also das bisher gewiesene Verfahren nicht anbringen lassen. Es giebt aber andere Mittel, in diesem und ähnlichen Fällen zwischen A und E eine Verticalfläche abzustecken, von denen ich aber erst in der Folge Unterricht ertheilen kann. Ueberhaupt muß ich hie erinnern, daß verschiedene schwere Fälle, die in der Aus-

übung beym Abstecken der Verticalflächen vorkommen können, sich ohne Kenntniß des Winkelmessens nicht leicht auflösen lassen.

Nur noch einen, dem in IV ähnlichen Fall will ich hier erläutern.

IX) Gesetzt (Fig. VII.) G, und H seyen auf dem Felde zwey Hügel, über welche man Stäbe mit A und E in eine Verticalfläche bringen sollte. Ich will annehmen, auf G könne man A sehen, aber E nicht, und eben so sey auf H nur E sichtbar, aber A nicht.

In diesem Falle stecke man auf G und H willkürlich zwey Stäbe n und o ab.

Ferner zwischen A und n in die Verticalebene An, den Stab m, und zwischen o und E in die Verticalebene oE den Stab p.

Dann erhellet, daß, wenn man bey m nur die übrigen drey Stäbe n, o, p sehen kann, vermittelst des in IV. angeführten Grundsatzes, alle Stäbe m, n, o, p. in die Verticalebene AE gebracht werden können.

Denn gleich beym Anfange stehen A, m, n, und o, p, E, jede drey für sich in einer Verticalebene. Befänden sich nun auch m, n, o, und n, o, p, jede drey für sich, in einer Ebene, so würden alle 6 Punkte oder Stäbe, in einer und derselben Verticalebene seyn.

Ste-

Stehen also n und o nicht in der Verticalebene m p, so müssen sie durch Hülfe einer Person, die bey m oder p visiret, in die Verticalebene m p gebracht werden.

Aber anfangs stand m in der Verticalebene An und p in der oE; Nachdem also die bey n und o hingesteckten Stäbe wiederum ausgezogen, und in die Verticalebene m p gebracht worden sind, so wird, bey der jetzigen Lage der 4 Stäbe m, n, o, p, der Stab m nicht mehr in der Verticalebene An; und p nicht mehr in der Verticalebenue oE sich befinden.

Man ziehe also m und p aus, und bringe erstern wieder in die Verticalebene An, den andern aber in die Verticalebene oE.

Hiedurch kommen aber nun n und o wieder aus der Verticalebene mp. Man ziehe daher n und o wieder aus, und setze sie zum zweitenmahle in die Verticalebene mp.

Hierauf ziehe man m und p wieder aus, und bringe m wieder in die Verticalebene An, p wieder in die oE.

Auf diese Art bringe man wechselsweise immer die dritte und vierte Stange n und o, in die Verticalebene mp der 2ten und 5ten, und darauf wieder den zweiten Stab m mit dem ersten und dritten A und n, den 5ten p aber mit dem 4ten und 6ten o und E,

eine Verticalebene, so wird man bey Fortsetzung dieser Arbeit es endlich dahin bringen, daß die Stäbe

A, m, n,
m, n, o, p
o, p, E

jede für sich in eine Ebene, und folglich insgesammt in die Verticalebene AE zu liegen kommen.

X) Die würkliche Ausübung dieses Verfahrens scheint freylich etwas weitläuftig zu seyn, allein wenn man selbst Hand anlegt, und dem gewiesenen Verfahren Fuß für Fuß folgt, so wird man darinn gar bald eine Fertigkeit erlangen.

Es versteht sich übrigens, daß die Arbeit desto geschwinder von statten geht, wenn bey jedem der mittleren Stäbe m, n, o, p ein gehörig unterrichteter Gehülfe befindlich ist; denn sonst würde das Laufen von einem Orte zum andern, die Arbeit ungemein verzögern.

Auch erhellet, daß, wenn zwischen den beyden äussersten Punkten A und E noch mehrere Hügel lägen, die Arbeit noch zusammengesetzter ausfallen würde. Aber vermittelst gehöriger Anwendung des Grundsatzes IV, wird sich leicht beurtheilen lassen, wie man in einem solchen Falle zu verfahren habe.

Nothwendige Vorsichten bey Absteckung der Verticalebenen, nebst Schätzung der Fehler, die man bey diesem Geschäfte leicht begehen kann.

§. 33. I) Bey Absteckung der Verticalebenen, wird man in der Ausübung bemerken, daß diejenige Stange, die sich zunächst vor dem Auge befindet, wegen ihrer Dicke allemal ein merkliches Hinderniß im Visiren verursacht, so daß es einige Schwierigkeit hat, die folgenden Stäbe, mit den erstern genau in eine Verticalfläche zu bringen.

Auch daß dieses Hinderniß desto größer ist, je näher sich das Auge hinter dem Stabe befindet.

Um nun den Fehler, der wegen der Dicke eines Stabes begangen werden kann, einigermaaßen zu bestimmen, überlege man folgendes:

Es sey Fig. VIII, O das Auge. Vor ihm stehe in einer gewissen Entfernung eine Stange vertical, deren Dicke oder Durchmesser die Linie ab sey. cd, mn seyen die Durchmesser von ein paar andern Stäben, und i, l, k, die Mittelpunkte von ab, cd, mn, so werden Verticallinien, die man sich durch i, l, k, einbildet, die Axen der Stäbe vorstellen.

Wenn

Wenn nun die Punkte i, l, k, in einer geraden Linie, oder vielmehr die durch i, l, k, aufgerichteten Verticallinien in einer einzigen Ebene liegen, dan sagt man eigentlich, daß die über a b, c d, m n, aufgerichteten Stäbe sich in einer Verticalfläche befinden, oder Stäbe in eine Verticalfläche abstecken, heißt eigentlich, sie so stellen, daß ihre verticalen Axen in eine einzige Ebene fallen.

Gesetzt nun, das Auge O befände sich in der durch die Mittelpunkte l, i, gezogenen geraden Linie l i O, und visirte an dem über a b aufgerichteten Stabe hinaus. Man ziehe die Gesichts- oder Visirlinien O b f, O a h, so ist, wenn m n zu beyden Seiten verlängert wird, die gerade Linie h f der Raum, den die Dicke a b des vor dem Auge befindlichen Stabes, in der Entfernung O m zu bedecken scheint, und alles, was innerhalb des Winkels h O f liegt, wird dem Auge O von a b bedeckt.

Wenn man also beym Abstecken einer Verticalfläche, nach der gemeinen Regel der Feldmesser, nemlich, die Stangen so zu setzen, daß sie einander zu decken scheinen, verfahren wollte, so würde man offenbar Fehler begehen. Denn, wo man auch innerhalb des Winkels h O f irgendwo einen Stab hinsetzte, so würde solcher doch noch immer bey jetzigen Lage des Auges, von den Stangen

über

über ab und cd, bedeckt zu seyn scheinen, und sich doch nicht immer in einer durch die Mittelpunkte i, l, eingebildeten Verticalfläche befinden.

So würde z. E. eine bey μ hingesetzte Stange, zwar von den Stäben über ab, cd, bedeckt zu seyn scheinen, aber sich doch nicht in der erweiterten Verticalfläche il befinden, und der Winkel μik wäre der Fehler, den man begienge, wenn man die Verticalebenen iμ, und ilk für einerley hielte.

So erhellet also, daß man der gemeinen Regel nicht Wort für Wort folgen darf, wenn man sich nicht Fehlern unterwerfen will, die in einigen Fällen beträchtlich seyn können.

Der Winkel fik wäre aber der größte Fehler, den man begehen könnte.

Wenn nun die Weite Ok mit der Dicke ab verglichen, sehr groß ist, so kann man ohne merklichen Irrthum den Winkel kif = kOf setzen, und da würde

$$\tan kOf = \frac{kf}{Ok} = \frac{ib}{Oi}$$

Man setze also die halbe Dicke der nächsten Stange vor dem Auge, oder ib = L Zoll, die Weite des Auges von ihr, oder Oi = E Zolle, so wird

tang

$$\tan kOf = \frac{L}{E}$$

Und wenn die Entfernung Ok, in der ein Stab mit denen über ab, cd, in eine Verticalebene ausgesteckt werden soll = F Zollen ist, so wird der Raum hf, den ab bedeckt, $= 2 . kf = \frac{2 . Ok . ib}{Oi} = \frac{2 F . L}{E}$ Zoll.

Aus dieser Formel $\tan kOf = \frac{L}{E}$ erhellet nun, daß der Winkel kOf, und folglich der Fehler, den man bey Absteckung einer dritten Stange in die Verticalfläche der ersten beyden, wegen der Dicke des sich vor dem Auge befindenden Stabes begehen kann, desto grösser ist, je grösser L und je kleiner E ist, d. h. je dicker der Stab ist, und je näher er sich vor dem Auge befindet. Denn tang kOf, oder der Bruch $\frac{L}{E}$ wächst, wenn der Zähler L zunimmt, und der Nenner E kleiner wird.

II) Um den Fehler, der von der Dicke der Stäbe herrührt, zu vermindern, muß man also zum Abstecken sich so dünner Stäbe bedienen, als möglich ist, und beym Visiren jederzeit das Auge weit genug davon halten. Einige rathen, man solle in den Stab, den man zunächst vor dem Auge hat, kleine Löcher der Län-

länge nach herunter bohren lassen, und durch diese Löcher visiren. Hiedurch wird freylich die Gefahr zu fehlen, um ein beträchtliches vermindert.

Andere, wie Marinoni in seinem Werke de re ichnographica, bedienen sich, bey Absteckung der Verticalebenen, des Meßtisches mit dem Diopterliniale. Hievon kann ich aber erst in der Folge nähern Unterricht ertheilen.

III) Das beste Mittel aber, den Fehler wegen der Dicke der Absteckstäbe zu vermindern, kömmt lediglich auf die Lage des Auges O an.

Die Regel ist nemlich diese:

Man muß das Auge nicht gerade hinter die Stange halten, wie hier bey O, denn da wird ihre Dicke ab dem Visiren immer hinderlich seyn, sondern man muß es etwas seitwärts halten, wie in o, dergestalt, daß die Visirlinie obdn an den Seitenflächen der Stäbe hinausstreiche, und sie also in b, d, n berühre; denn es erhellet, daß alsdann die Mittelpunkte i, l, k, mithin auch die über i, l, k aufgerichteten Verticallinien, in eine einzige Ebene zu liegen kommen, so bald man den dritten Stab bey mn so einsetzt, daß die Visirlinie obdn gemeinschaftlich die Seitenflächen der Stäbe berührt, und in diesem Sinne muß man den Ausdruck nehmen, wenn

man der Kürze halber sagt: die Stäbe decken sich.

IV) Bey Absteckung der Verticalflächen ist es ferner auch nothwendig, die Stangen, so genau als möglich, lothrecht in den Boden zu stecken. Aus welcher Ursache, wie ich schon oben erinnert habe, man sich des Senkbleyes zu bedienen hat, welche Vorschrift hauptsächlich beym Abstecken über Hügel zu empfehlen ist.

Die Fehler, die man sonst zu befürchten hätte, lassen sich aus folgenden beurtheilen:

Wenn Fig. IX die beyden Stäbe AB, CD vertical sind, so hat es keine Schwierigkeit, die folgenden EF, u. s. w. mit AB und CD in eine Ebene zu bringen, wenn man die Vorschriften (I, II, III) befolgt.

Gesetzt aber, die Stange CD Fig. IX stehe schief auf der Horizontalfläche.

Dann würde ein Beobachter, welcher hinter AB z. E. an dem obersten Ende d, oder nach der Richtung Bd vorbey visirte, die dritte Stange nicht bey E in die erweiterte Verticalfläche AC, sondern bey e einsetzen lassen, wo nemlich die Stange ef in den Gesichtsstrahl Bdf einträfe. Man würde also statt der Verticalfläche ACE, die über Ae erhalten.

Bey-

Beyde würden mit einander den Winkel EAe machen, wenn AE, Ae Horizontallinien sind. Die drey Punkte A, C, e, würden also nicht in einer einzigen Verticalebene liegen.

Man fälle von d das Loth dc herab, und von c auf die Horizontallinie AE das Perpendikel cn, so drückt cn aus, wie weit der Punkt d der schiefen Stange, ausserhalb der Verticalfläche ACE liegt.

Weil nun in dem rechtwinklichten Dreyecke Acn

$$\sin cAn = \frac{cn}{Ac} \text{ ist}$$

und man, wenn der Stab Cd einigermaaßen weit von A entfernt ist, ohne merklichen Irrthum Ac = AC folglich

$$\sin cAn = \frac{cn}{AC}$$

setzen kann, so erhellet, daß der Winkel CAe, oder der Fehler, den man begienge, wenn man die Verticalfläche über Ac, mit der über AC, für einerley hielte, desto beträchtlicher ist, je größer cn und je kleiner AC ist, d. h. je weiter der Punkt d, nach welchem man visirt, ausserhalb der Verticalfläche AC liegt, und je näher sich die schiefstehende Stange Cd bey der erstern AB befindet.

Wär-

Wäre cn = o, das heißt, stände die Stange Cd zwar schief, aber doch in der Verticalfläche AC, so wäre auch sin cAn oder der Winkel cAn, mithin der Fehler = o.

Eine Stange kann also wohl schief stehen, sie muß aber, wenn kein Fehler entstehen soll, ihre schiefe Lage in der Verticalfläche AC selbst haben.

V) Da in manchen Fällen, bey Absteckung der Verticalebenen, besonders in bergigten Gegenden, die Stangen nahe neben einander zu stehen kommen, und man oft gezwungen ist, an ihrem obern Ende vorbey zu visiren, so erhellet, wie nothwendig es sey, in solchem Falle auf ihre lothrechte Stellung zu sehen.

Für die Ausübung sind aber aus dem vorhergehenden auch noch folgende Regeln herzuleiten:

1) Müssen die Absteckstäbe auf dem Felde immer so weit als möglich, und als es die Umstände erlauben, von einander weggesetzt werden, damit, wenn solche ja aus zufälligen Ursachen eine schiefe Lage bekommen sollten, der daraus zu befürchtende Fehler dadurch vermindert werde. (IV)

2) Muß man, wenn es angeht, nie an dem obern Ende eines Stabes, wie Cd Fig. IX.) vorbey visiren, sondern allemal

lieber bey einem Punkte vorbey, der näher am Boden liegt. Denn das obere Ende eines schiefstehenden Stabes fällt allemal am weitesten ausserhalb der abzusteckenden Verticalebene ACE.

Die Ausmessung gerader Linien.

§. 34. Nach dem Abstecken gerader Linien folgt nun das Ausmessen derselben. Vorher muß ich aber die dazu erforderlichen Werkzeuge beschreiben.

1) Ein Maaßstaab besteht aus einer geraden, ohngefähr zwey Zoll breiten, und 1 Zoll dicken, prismatischen viereckigten Stange, von gutem dauerhaftem, wohl ausgetrocknetem Tannen- oder Büchenholze, auf der man eine gewisse Anzahl von Fußen, so genau als möglich, verzeichnet, und solche (oder wenigstens den letzten Fuß) durch zarte Einschnitte in Zolle und Linien eingetheilt hat.

Gewöhnlich macht man sie 5 bis 6 Fuß lang. Zu Ausmessung sehr langer Linien ist es aber vortheilhaft, Maaßstäbe von 10 und mehreren Fußen zu gebrauchen.

So bediente sich Picard bey Gelegenheit der Abmessung eines Meridiangrades in Frankreich, Meßstangen von 12 Fußen.

Ob nun gleich die Messung mit Maaßstäben wohl die genaueste ist, so erhält man doch bey der jedesmaligen Anlegung, nur eine Länge von wenigen Fußen, und die Arbeit geht also nicht sehr geschwind von statten. Man bedient sich daher in Fällen, wo nicht die größte Genauigkeit nöthig ist, mit mehrerem Vortheil der Meßkette, welche gewöhnlich eine Länge von 5 oder 6 Ruthen enthält.

II) Die nähere Einrichtung der Meßkette ersieht man aus Fig. X.

Man läßt von Eisendrathe, etwa in der Dicke eines Federkiels, gleich lange, gerade Stäbe, wie rk, lp, u. s. w. verfertigen, deren Enden umgebogen, und durch Ringe n von geschlagenem Messinge mit einander verbunden sind.

Die Entfernung zwischen jeden nächstaufeinander folgenden Mittelpunkten zweyer Ringe, muß genau einerley Länge, z. E. die Länge eines Fußes betragen; Dergleichen Glieder oder Fuße werden so viel an einander gehängt, bis man genau eine Länge von einigen Ruthen erhält. Gemeiniglich macht man die Kette 5 Ruthen lang.

Die einzelnen Ruthen werden durch etwas größere Ringe angedeutet, durch deren Mittelpunkte, um sie von andern gut unterscheiden zu kön-

können, kleine Quer-Riegel durchgehen, wie Q. ausweiset.

An den beyden Enden der solchergestalt eingerichteten Meßkette, werden ein paar große Ringe, wie A, etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser, angebracht. Diese Vorrichtung dienet dazu, daß die beyden Enden der Kette an die zugehörigen Kettenstäbe gehängt werden können.

Diese Kettenstäbe sind etwa 4 Fuß hoch und cylindrisch, in der Dicke, daß man die äussersten Ringe der Kette, gedrängt an ihnen herablassen kann.

Den untern Theil eines solchen Kettenstabes, wie man sie gewöhnlich verfertigt, sieht man bey P.

Daselbst ist q n ein eiserner, sich in eine pyramidenförmige Spitze endigender Stift, oder eine Stachel, die fest unten an die Seitenfläche des cylindrischen Kettenstabes angeschuhet ist. q n ist etwa 3 Zoll lang und zu oberst 4 Linien dick.

Das untere Ende des Stabes selbst ist etwa in einer Höhe von 2 Zollen, von der Grundfläche angerechnet, mit Eisen beschlagen, und ohngefähr bey i geht ein Stift durch, der auf beyden Seiten des Stabes hervorragt.

Diese Einrichtung dient dazu, daß, wenn die äussersten Ringe A der Meßkette, an den

Ket-

Kettenstäben heruntergelassen worden, solche auf den hervorragenden Enden dieser Stifte zu ruhen kommen.

Den Anfangspunkt der Meßkette nenne ich denjenigen Punkt, wo die Schuhe angerechnet werden.

Wenn nun, wie gewöhnlich, die Stachel qn an der Seitenfläche des Kettenstabes befestigt ist, und der Ring A an dem Kettenstabe herabgelassen wird, so würde der Anfangspunkt der Meßkette nicht über den Anfangspunkt einer auszumessenden Linie, in welchen der Kettenstab eingesetzt wird, zu liegen kommen, wenn die Fuße der Meßkette, von dem Mittelpunkte des an P steckenden Ringes A angerechnet würden.

Man pflegt daher nicht von dem Mittelpunkte des Ringes A, sondern von dessen äussersten Ende m den ersten Schuh mn anzurechnen, und dann den Ring A so an den Kettenstab P zu stecken, daß der äusserste Punkt m gerade über der Stachel qn zu ruhen kömmt: damit, wenn die Stachel in den Anfangspunkt einer auszumessenden Länge eingesetzt wird, alsdann der Anfang der Meßkette oder der Punkt m gerade über den Anfangspunkt der auszumessenden Linie zu liegen komme.

Es

Es kann nun während der Messung leicht geschehen, daß sich an dem Kettenstabe der Ring A etwas verrücket, und der Punkt m aus seiner gehörigen Lage kömmt, man muß daher bey jedem neuen Kettenzuge zusehen, ob sich m oder der Anfang der Meßkette noch über der Stachel q n befinde.

Dies ist eine Unbequemlichkeit: Es wäre weit besser, wenn man die Vorrichtung so machte, daß nicht, wie gewöhnlich, die Stachel q n an die Seitenfläche des Kettenstabes befestiget würde, sondern daß q n, wie bey O zu sehen ist, gerade durch den Mittelpunkt der Grundfläche gienge. Alsdann könnte man auch von dem Mittelpunkte des Ringes A die Schuhe anrechnen, und man wäre versichert, daß, wie auch A an den Kettenstab gestecket würde, doch allemal der Anfangspunkt der Meßkette, über den Anfangspunkt der auszumessenden Linie, in welchen die Stachel q n eingesetzet worden, zu liegen käme.

Einige Feldmesser nehmen die Glieder an der Meßkette, nur einen halben Fuß lang. Allein, dann braucht man zur Verbindung der Glieder doppelt soviel messingene Ringe, und hiedurch werden nicht nur die Kosten erhöhet, sondern auch Fehler veranlaßt.

Da ferner der Geometer sich immer der zehntheiligten Eintheilung bedient, so sind die Fuße der Meßkette gewöhnlich Decimalfuße. Rechnete man also an einem gewissen Orte z. E. 16 Fuß auf eine Ruthe, so würde eben diese Länge auf der Kette in 10 Decimalfuße getheilet. Da wären also die Kettenfuße weit größer, als die gewöhnlichen, nemlich in dem Verhältniße 16 : 10 oder 8 : 5.

Gewöhnlich sind die Fuße auf der Kette nicht weiter in Zolle getheilt. — Man muß also die kleinern Theile entweder nach dem Augenmaaße schätzen, oder wenn man genau verfahren will, solche vermittelst eines angelegten Zollstabes bestimmen. Dieser besteht aus einem prismatischen Stäbchen, auf dem der Fuß in Zolle und Linien getheilt ist.

III) Die Meßschnüre sind ehemals auch häufig gebraucht worden. Man verfertigte sie von Hanf oder auch Bast. Allein wegen der großen Unvollkommenheit, daß sich ihre Länge durch mehr oder mindere Spannung, und durch Feuchtigkeiten der Luft, oder des Bodens, auf dem man mißt, bald mehr bald weniger ändert, ist man fast völlig von ihrem Gebrauche abgekommen, ob man gleich gedachten Unvollkommenheiten dadurch in etwas abhelfen kann, daß man die Schnüre in Oel siedet, sie trocknen läßt und dann durch zerflossenes Wachs

zie-

her, oder auch mit hartem Wachs durch und durch bestreicht. (Schwenters Geom. Pract. p. 481.)

Indessen kann man sich doch in manchen Fällen, mit Vortheil der Meßschnüre bedienen, besonders, wenn keine gar zu große Genauigkeit verlangt wird; und dergleichen Fälle kommen häufig vor.

Man kann die Schnüre sehr lang machen, ohne daß sie beym Gebrauche besondere Unbequemlichkeit verursachten, man kann sie um einen Stab oder um eine Rolle wickeln, und bequem mit sich führen. Die Abtheilungen der Schnur werden durch eingebundene Knoten oder durch andere Kennzeichen bemerkt.

Am häufigsten wird die Schnur gebraucht, bloß eine gerade Linie durch sie zu bezeichnen, oder an ihr mit einem Maaßstabe herzumessen, wenn sie auf einem ebenen Boden ausgespannt worden ist.

IV) Bey Messungen über Hügel und Anhöhen läßt sich die Meßkette nicht gut anwenden; die Maaßstäbe sind in solchem Falle weit bequemer. Man gebraucht aber dazu einen verticalen Maaßstab ab (Fig. XI.) der genau von b nach a herauf in Fuße, Zolle und Linien getheilt, und unten bey c mit ei-

ner Spitze oder Stachel versehen ist, um ihn in den Boden stecken zu können.

Ferner einen horizontalen mn, der von m nach n in Fuße, Zolle und Linien eingetheilt ist und die Setzlatte heißt.

Wenn der eine Endpunkt m an die Anhöhe gesetzt wird, so kann man mn, um m, als um einen Mittelpunkt an dem verticalen Maaßstabe ab, auf und nieder bewegen.

Man kann auch bey m eine Spitze anbringen, um in weichem Boden das Ausrutschen des Maaßstabes mn zu verhüten.

V) Die Meßketten und Maaßstäbe sind die bequemsten und brauchbarsten Werkzeuge zur Ausmessung gerader Linien.

Man giebt aber in einigen Büchern, die von der Feldmeßkunst handeln, noch andere Werkzeuge an.

So gebrauchen z. B. einige Feldmesser den sogenannten Meßzirkel, welcher wie ein gewöhnlicher Reißzirkel eingerichtet ist, aber nur von Holz, und von der Größe gemacht wird, daß man auf dem Felde füglich zwischen beyden Zirkelspitzen eine Länge von 4 — 5 Fußen fassen kann. Man spannet an die auszumessende Linie eine Schnur, und misset längs sie , indem man den Zirkel beständig umwendet;

det; Nach vollendeter Messung wird die Zahl der Umwendungen in Fuße verwandelt, indem man für jede Umwendung so viel Fuße rechnet, als die Zirkelspitzen zwischen sich fassen.

VI) Es ist beym Gebrauche der Maaßstäbe, wenn man eine Linie damit sehr genau ausmessen will, nothwendig, daß man mit denselben über die kleinen Ungleichheiten des Bodens wegmessen könne. Deswegen bedienet man sich in solchem Falle kleiner hölzerner, etwa 2 Fuß hoher Schemmel, auf die man die Maaßstäbe legt. Bey Fig. XII zeigt sich die Gestalt eines solchen Schemmels mit 4 Füßen. A ist das Tischchen, worauf man den Stab legt. Die Füße des Schemmels sind bey a und b in Gewinden beweglich. Ein hölzerner Stab cd, welcher unten an das Tischchen A befestigt ist, ist mit Schraubengängen versehen, welche in eine Mutter greifen, die sich an dem untern Bretchen bey m befindet. Hiedurch kann man das Tischchen A sanft erhöhen oder erniedrigen, je nachdem man die Schraube in ihrer Mutter herumbewegt. Noch besser ist es, wenn der Theil cd ohne Schraubengänge ist, und sich bloß in einer hölzernen Röhre auf- und niederschieben, seitwärts aber durch eine Schraube feststellen läßt.

VII) Bey dem Gebrauch solcher Tischchen ist es nicht undienlich, wenn die Maasstäbe wie

Fig.

Fig. XII. P an ihren Enden mit ein paar senkrecht eingeschrobenen etwa 1 Fuß hohen eisernen Stiften m, i versehen werden, an denen man hinausvisiren, und dadurch die Maaßstäbe desto genauer nach bestimmten Punkten hinrichten kann.

VIII) Damit man endlich den Maaßstäben die nach §. 7. erforderliche horizontale Lage geben könne, so mag man sich hiezu blos der gemeinen Setzwaage bedienen.

Man läßt (Fig. XIII) von gutem Lindenholze drey glatt gehobelte Leisten, ab, bc, ac, von denen die beyden ab und bc einander gleich seyn können, verfertigen, und in ein Dreyeck zusammenfügen. Auch geht quer durch noch eine vierte Leiste ef parallel mit ac.

Aus der Spitze b des Dreyeckes läßt man von einem Stifte, an einem feinen Silberfaden oder Pferdehaar, ein Loth bl herabhängen. Wenn nun bl frey hängt, so ist bekanntermaaßen die Richtung des Loths eine Verticallinie, mithin ein Perpendikel auf ihr, eine Horizontallinie. Will man nun auf der Leiste ef den Punkt n finden, welchen der frey herabhängende Faden bl decken muß, damit ef und folglich auch die damit parallele Leiste ac nach Erfordern eine horizontale Lage erhalte, so nehme man einen vorher wohl geprüften Winkelhaaken, lege dessen einen Schenkel genau an die Leiste ac,

und

und lasse den andern durch den Punkt b gehen. Hierauf ziehe man längs des durch b gehenden Schenkels auf ef eine feine Linie, so hat man daselbst die Stelle n, welche der frey herabhängende Faden bl decken muß, wenn die Leiste ac horizontal seyn soll.

Denn alsdann ist die Richtung der Leiste, auf der verticalen Richtung des Loths senkrecht, mithin horizontal.

Man hat noch andere Methoden, den Punkt n zu bestimmen, den das herabhängende Loth decken muß, damit die Linie, nach der die Setzwaage aufgestellt ist, horizontal sey. Man s. davon Kästners Markscheidek. IV. Anm. (24.) Helfenszrieders Geodäsie §. 151. u. f.

Stellt man nun die solchergestalt eingerichtete Setzwaage auf einen Maaßstab, z. E. auf mn Fig. XI, so daß die Leiste ac längs mn zu liegen kömmt, und bewegt alsdann mn so lange auf und nieder, bis das Loth bl die auf ef bezeichnete Stelle n deckt, so ist in dem Augenblicke, die Grundfläche der Leiste ac, und folglich auch der Maaßstab mn auf der Richtung des Lothes bl senkrecht, und also horizontal.

In der Ausübung ist aber zu bemerken, daß sich das Loth bl ganz frey bewegen, und nicht an der Leiste ef reiben dürfe.

Man hat noch andere Einrichtungen, den horizontalen Stand einer Fläche oder Linie zu erfahren. Aber die bisher beschriebene gemeine Setzwaage, ist zu der Absicht, einen Maaßstab horizontal zu legen, hinreichend genau.

Anmerkung.

§. 35. Zu gewissen Absichten, wo keine gar zu große Schärfe verlangt wird, kann man sich mit Vortheil der Schritte zur Ausmessung gerader Linien bedienen: Und unter allen Methoden, Längen nur beynahe zu bestimmen, ist diese gewiß die bequemste und geschwindeste in der Ausübung auf dem Felde.

Wenn man nämlich vorher durch einen Versuch, die Anzahl von Schritten bestimmt hat, die auf eine gegebene Länge gehen, so läßt sich nachher jede andere Länge, die in Schritten bekannt ist, auf gewöhnliches Maaß reduciren.

Die Gleichförmigkeit der Schritte ist aber hiebey eine nothwendige Voraussetzung. Man kann sich solche durch einige Uebung leicht verschaffen. Man nehme eine gewisse Länge vor, schreite sie zu wiederholtenmalen ab, und

un-

untersuche, ob man immer einerley Anzahl von Schritten bekömmt. Wo nicht? So muß man den Versuch so oft anstellen, bis man eine Fertigkeit erlangt hat, wenigstens nicht viel zu fehlen.

Um nun das Verhältniß eines Schrittes gegen ein bekanntes Maaß ausfindig zu machen, so messe man auf einer horizontalen Ebene, eine gerade Linie mit der Meßkette. Je länger sie ist, desto genauer findet man das Verhältniß. Hierauf untersuche man die Anzahl der Schritte, die auf diese Länge gehen.

So wird man daraus berechnen können, wie viel Fuße auf einen Schritt kommen.

Auf diese Art habe ich gefunden, daß 100 meiner gewöhnlichen Schritte 253 Kalenberger Fuß betragen. Es kommen also auf einen meiner Schritte 2,53 Fuß oder 2′ 5″ 3‴.

Gewöhnlich rechnet man 2½ Fuß auf einen Schritt, allein, man siehet wohl, daß dieses nur eine ohngefähre Bestimmung ist, und nicht für alle Schritte gelten kann.

Ich habe sehr oft den Versuch gemacht, nämlich eine Länge erstlich abgeschrittet, die gefundene Anzahl von Schritten auf Fuße gebracht, und dann die nemliche Länge mit der

Kette gemessen. In den meisten Fällen trafen beyde Resultate, ziemlich gut überein, auch selbst bey einer sehr großen Anzahl von Schritten, so daß ich überzeugt bin, auf einem ebenen Boden, auch bey einer Länge von 1000 bis 2000 Schritten, selten um 4 bis 5 Schritte zu fehlen. Beym Zählen der Schritte ist es nöthig, wenigstens für jede 100 in einem Manuale ein Merkmal zu machen.

Man hat indessen, um das Zählen der Schritte zu ersparen, besondere Maschinen erfunden, die man Schrittzähler nennt. — Allein ich halte es hier für überflüssig, eine Beschreibung davon mitzutheilen, da man solche Werkzeuge gar wohl entbehren kann. Indessen kann man in Bions mathematischer Werkschule p. 98 darüber einiges nachlesen. In Nürnberg werden sie gegenwärtig sehr nett verfertigt, so daß man sie bequem, wie eine Taschenuhr, bey sich tragen kann.

Anmerkung.

§. 36. Ehe ich zur Ausmessung der geraden Linien fortgehe, muß ich noch erinnern, daß

1) Ueberhaupt bey den Feldmesserarbeiten immer einige Gehülfen zur Hand seyn müssen, sowohl, um die Werkzeuge zu tragen, als auch selbst, gerade Linien abzustecken, Ketten

zu

zu ziehen, und andere Geschäfte auf Befehl des dirigirenden Feldmessers zu verrichten; damit man aber während der Arbeit nicht aufgehalten werde, so müssen die Gehülfen vorher wohl unterrichtet seyn. Auch müssen keine alte träge Leute, sondern junge muntere, aufmerksame Personen gewählet werden.

2) Muß der Feldmesser immer ein Manual oder Diarium, nebst einem Besteck, bey sich führen, sowohl um die Messungen und Entwürfe, als auch andere bemerkungswürdige Umstände aufzeichnen zu können, und in dem Diario alles nach gewissen Rubriken ordnen, damit nachher zu Hause beym Auftragen und Berechnen keine Verwirrung entstehe.

Aufgabe.

§. 37. Auf einer ebenen Fläche eine gerade Linie mit der Meßkette auszumessen.

Auflösung.

I) Es sey Fig. V. AG die auszumessende Linie. Ist der Punkt A von G so weit entfernt, daß man das bey G abgesteckte Signal, bey A nicht deutlich erkennen kann, so will ich annehmen, nach §. 32. seyen bereits Stäbe AB, CD, EF, u. s. w. in die vorgegebene Verticalfläche AG abgesteckt.

II) Ist dieses geschehen, so werden die beyden äussersten Ringe der Meßkette, an die zugehörigen Kettenstäbe gesteckt, mit der Vorsicht, daß Fig. X. der äusserste Punkt m eines jeden Kettenringes A gerade über die Spitze n des Kettenstabes P zu liegen komme. (§. 34. II.)

Auch werden die Glieder der Meßkette gehörig aus einander gelegt.

III) Nachdem alles in Ordnung ist, so ergreifen zwey Kettenzieher die Kettenstäbe, und der vorwärtsgehende Kettenzieher versiehet sich mit einer gewissen Anzahl von Zeichenstäbchen. (§. 31.)

Ich will den vorwärts gehenden Kettenzieher A nennen, den nachfolgenden aber B.

IV) B begiebt sich nun mit seinem Kettenstabe sogleich nach dem Anfangspunkt A der auszumessenden Linie, zieht die daselbst stehende Fahne oder Stange AB aus, und setzet in das Loch, wo AB gestanden, die Stachel seines Kettenstabes.

V) Der vorwärts gehende Kettenzieher A, begiebt sich aber mit seiner Kettenstange, so weit es die ausgespannte Kette zulässet; nach und hält daselbst seinen Kettenstab frey in

der

der Hand herunter, so daß er sich vermittelst seiner Schwere von selbst in eine verticale Richtung stellt.

VI) B aber tritt einige Schritte hinter seinen Kettenstab, visirt längs ihn vorbey, und untersucht, ob der Kettenstab des A sich in der abgesteckten Verticalebene ACEG befinde. Wenn solches nicht ist, so giebt B dem A durch Zeichen und Zurufen zu verstehen, den Stab rechts oder links zu stecken, so lange bis derselbe bey α in der abgesteckten Verticalfläche ACEG steht.

VII) Zugleich spannet A die Meßkette gehörig aus, damit sie gerade zu liegen komme, und wenn solche etwa durch kleine Hügel aufgehalten würde, so wird sie etwas in die Höhe gehoben, und geworfen oder geschlenkert, bis sie gerade liegt.

Alsdann hat man von A bis α die Länge einer Meßkette.

VIII) Nun ziehen beyde Kettenzieher ihre Stäbe wiederum aus: B setzt in das Loch, wo sein Kettenstab gestanden, die (IV) ausgezogene Meßfahne oder Stange: A aber stecket da, wo nach gehöriger Einrichtung die Spitze seines Kettenstabes gestanden, ein Zeichenstäbchen ein.

Hierauf gehen beyde Kettenzieher mit ausgespannter Kette weiter fort nach G oder auch nach dem nächsten Absteckstabe zu.

IX) Wenn B nach α hinkömmt, wo das Zeichenstäbchen stehet, so ziehet er solches aus, verwahret es wohl, und stecket in das Loch bey α die Stachel seines Kettenstabes.

A aber, der nach β hinkömmt, stecket auf Befehl des B, der längs seines Stabes vorbey visiret, seinen Kettenstab wieder in die abgesteckte Verticalfläche ACEG, oder auch A visiret an seinem eigenen Kettenstabe vorbey, und siehet zu, ob er mit dem Kettenstabe des B, und der bey A zurückgelassenen Fahne in gerader Richtung stehe, spannet die Kette an, und setzet darauf wieder, wie vohrin, ein Zeichenstäbchen ein, so hat man von α bis β abermahls eine Kettenlänge.

X) Auf diese Art gehet die Arbeit immer fort; der vorwärts gehende Kettenzieher setzt allemahl in das Loch, wo sein gehörig eingerichteter Kettenstab gestanden, ein Zeichenstäbchen, und der nachfolgende Kettenzieher sammlet sie ein.

XI) Wenn endlich A nach γ hingekommen ist, und er selbst bemerkt, daß das letzte Stück γG nicht mehr völlig eine ganze Kettenlänge betragen möchte, so begiebt er sich mit seinem

Ket=

Kettenstabe, dennoch immer weiter vorwärts, über G hinaus, bis B nach γ hinkömmt. Hierauf spannet A die Kette gehörig aus, B aber geht längs der ausgespannten Kette γ fort, und zählt, wie viel ganze Ruthen und Schuhe noch auf das Stück Gγ gehen. Trifft G nicht gerade auf den Endpunkt eines Schuhes, so schätzt er die noch übrigen Zolle entweder nach dem Augenmaaße, oder bestimmt solche vermittelst eines angelegten Zollstabes.

XII) Ich will setzen, von A bis γ habe B 10 Zeichenstäbchen eingesammlet, und das letzte Stück γG sey $= 3^{\circ}\ 5'\ 7''$ gefunden worden; Wäre nun die gebrauchte Meßkette 5 Ruthen lang gewesen; so würde also endlich die ganze ausgemessene Länge AG $= 10.\ 5^{\circ} + 3^{\circ}\ 5'\ 7'' = 53^{\circ}\ 5'\ 7''$ seyn.

Anmerkung.

§. 38. Solchergestalt läßt sich in kurzer Zeit eine beträchtliche Länge ausmessen. Nur sind hiebey noch folgende Erinnerungen nöthig.

1) Müssen die Kettenstäbe allemal vertical in den Boden gesteckt werden.

2) Kommt man bey einer Messung auf Wiesen, Aengern, mit Moos bewachsenen Gründen u. dergl. an seichte, sumpfigte Stellen, in denen man lange herumwaten müßte,

so

so ist es, um der Gesundheit nicht zu schaden, rathsam, sich blecherner Wasserstiefel zu bedienen. Diesen Vorschlag thut Helfenszrieder (Anleitung zur Geodäsie §. 245). wo auch die Einrichtung solcher Stiefel nachgelesen werden kann.

Wenn es die Umstände zulassen, so ist es am besten, eine Messung dieser Art auf eine günstigere Jahreszeit zu verschieben, daß solche Plätze entweder austrocknen, oder zufrieren. Denn so lange sie mit Wasser bedeckt sind, ist das Einsetzen der Kettenstäbe und Zeichenstäbchen ohnehin sehr unsicher. Besser ist es noch in solchen Fällen mit Maasstäben auf Schemmeln herzumessen, die man leicht fest genug stellen kann. Wäre aber die unmittelbare Messung in jedem Falle zu beschwerlich, so bediene man sich der in der Folge vorkommenden Hülfsmittel, und suche die Messung entweder durch Hülfe des Meßtisches, oder trigonometrisch aus einer schicklichen Standlinie zu bewerkstelligen.

3) Oft ereignet es sich, daß niedriges Buschwerk oder Gesträuche die Messung unterbrechen. In solchem Falle müssen sie umgebogen, oder, wenn nichts daran gelegen, abgehauen werden.

4) Ueber kleine Gräben und Vertiefungen, ... man überschreiten, oder über die man ein ...tt legen kann, läßt sich ohne Mühe die Mes-

Messung fortsetzen; ist aber ein Graben sehr breit, so muß man durch andere Kunstgriffe, die ich aber erst in der Folge erklären kann, vorher die Breite desselben messen, ehe man jenseits des Grabens, die Arbeit weiter fortsetzen kann.

5) Wenn kleine Erhöhungen unterwegs vorkommen sollten, so muß man die äussersten Ringe der Meßkette, an ihren Stäben in die Höhe schieben, so daß die Meßkette frey in gerader Linie über die kleinen Ungleichheiten wegstreiche.

6) Wenn die ebene Fläche von A nach G (Fig. V.) abhängig oder nicht horizontal ist, so ist die gemessene Weite AG, eigentlich nicht der Horizontalabstand der beyden Punkte A und G.

Hätte man diesen bestimmen wollen, so wäre es nothwendig gewesen, bey jedem Kettenzuge die Kette horizontal auszuspannen.

Dieses geschiehet, wenn der tiefer stehende Kettenzieher, nachdem er seinen Stab vertical in den Boden gesteckt, den Ring an seinem Kettenstabe ergreift, und solchen in die Höhe schiebt, bis die Richtung der ausgespannten Meßkette, mit der verticalen Richtung des Kettenstabes einen rechten Winkel macht.

Der rechte Winkel wird aber nur nach dem Augenmaaße geschätzt.

Völlig genau, und auf eine andere Art die Meßkette horizontal zu richten, würde ziemliche Schwierigkeiten haben, ja gar nicht möglich seyn. Es kömmt aber auch so sehr nicht darauf an, weil eine kleine Abweichung von der horizontalen Lage keinen merklichen Fehler verursacht.

Wenn man ohngefähr nach dem Augenmaaße, oder sonst auf eine andere Art wüßte, um wie viel Fuße der Punkt A (Fig. XIV.) höher läge als G, so könnte man nur geradehin die schiefe Linie AG messen, und alsdann aus AG, AC, in dem rechtwinklichten Triangel ACG den Horizontalabstand CG berechnen, aus §. 7.

Denn es ist $CG = \sqrt{(AG^2 - AC^2)}$

Gesetzt, man habe gemessen $AG = 300'$ und nach dem Augenmaaße geschätzt oder sonst gefunden $AC = 20'$ so würde $CG = \sqrt{(90000 - 400)} = \sqrt{89600} = 299{,}33'$ oder $299' \, 3'' \, 3'''$ mithin der Horizontalabstand der beyden Punkte A und G nur um $6'' \, 7'''$ kleiner, als die wahre Weite AG.

Man siehet hieraus, daß wenn die Fläche, auf der man misset, nur sehr wenig gegen die Horizontalfläche geneigt ist, man ohne merklichen

chen Irrthum, die wahre Weite AG der horizontalen CG gleichsetzen könne.

Man könnte auch aus der wahren Weite AG die horizontale CG berechnen, wenn man den Elevationswinkel AGC entweder nach dem Augenmaaße geschätzt, oder unmittelbar gemessen hätte; denn es ist

$$CG = AG.\ \cos AGC$$

Der Winkel AGC brauchte aber nur ohngefähr in Graden bekannt zu seyn, wenn die Anhöhe nicht sehr steil ist.

Ex. Es sey AGC = 10°; AG = 1000 Fuß, so wird aus den Sinustafeln cos AGC = 0,985, wenn man nämlich die höhern Decimalstellen wegläßt; also AG = 0,985 . 1000 Fuß = 985 Fuß; daher AG — CG = 1000 F. — 985 . F. = 15 Fuß; um so viel wäre folglich, bey einer wahren Weite = 1000 F. und einem Elevationswinkel von 10°, die Horizontalweite kleiner, als die wahre.

Ist aber die Fläche von A nach G sehr abhängig, so läßt sich die Horizontalweite auch sehr bequem und richtig durch Hülfe zweyer Maaßstäbe, von denen immer einer vertical gestellt, und der andere horizontal angelegt wird, bestimmen, wie ich hernach zeigen werde.

Aufgabe.

§. 39. Auf einem Boden, der nicht sehr abhängig, und auf dem keine beträchtliche Ungleichheiten vorkommen, eine gerade Linie mit Maaßstäben auszumessen.

Aufl. I) Gesetzt (Fig. XV.) sey der Horizontalabstand der beyden Objecte U und Y zu messen, und von U nach Y sey der Boden nicht sehr abhängig. Ich nehme an, daß zwischen U und Y bereits Stäbe in die Verticalebene UY abgesteckt worden sind.

Um nun den erwähnten Horizontalabstand sehr genau zu bestimmen, so bediene man sich dazu der (§. 34. VI.) angegebenen Maaßstäbe mit Stiften, nebst der daselbst beschriebenen Schemmel, auf folgende Art.

II) Gleich zunächst des Anfangspunktes U setze man einen dergleichen Schemmel (§. 34 VI und Fig. XII.) hin. Ferner bey B und C, einen zweiten und dritten, ohngefähr nach dem Augenmaaße in die gerade Richtung UY, und etwa in der Weite der Maaßstäbe von einander.

Zu der Messung selbst werden nun wenigstens drey Personen, die A, B, C heißen mögen, erfordert; A und B beschäftigen sich mit Legung der Maaßstäbe; C aber führet eine Setzwaage (§. 34. VIII u. Fig. XIII) mit sich.

III)

III) Nachdem nun die Tischchen ohngefähr nach dem Augenmaaße wagerecht gestellet worden, so nimmt A einen von denen §. 34. VII beschriebenen Maaßstäben, und legt ihn auf die beyden Schemmel A und B, so, daß der eine Endpunkt r dieses Maaßstabes n r auf das Tischchen des Schemmels B, das andere Ende n aber lothrecht über den Anfangspunkt U der auszumessenden Linie zu liegen komme.

IV) Hierauf nimmt C eine Setzwaage, stellt solche bey d auf den Maaßstab n r, und läßt von den Gehülfen B und A die Füße der beyden Schemmel so lange verrücken, und die Tischchen, auf denen der Maaßstab ruht, auf und nieder stellen, bis der herabhängende Faden der Setzwaage genau die auf dem Querleisten bezeichnete Stelle §. 34. VIII. bedeckt; Alsdann wird der Maaßstab n r horizontal liegen, und die Ebene der beyden Tischchen, so viel als bey diesem Geschäfte nöthig ist, wagerecht seyn.

Nach dieser Vorbereitung bringt nun der Gehülfe A das Ende n des auf den Tischchen ruhenden Maaßstabes n r völlig genau über den Anfangspunkt U der auszumessenden Linie, und bedienet sich zu dieser Absicht eines von n herabzuhängenden Lothes.

Wenn dieses geschehen ist, so hält A sein Auge hinter den vordersten Stift m, visiret

an beyden Stiften m und i hinaus, nach dem bey Y aufgerichteten Signale, oder nach dem nächsten Absteckstabe zu, und untersuchet, ob die Richtung des Maaßstabes n r sich in der abgesteckten Verticalebene UY befinde. (I)

Wenn solches nicht ist, so verrückt er den Maaßstab n r so lange rechts und links, aber so, daß doch n beständig lothrecht über U bleibe, bis n r in gerader Linie nach dem Gegenstande Y hingerichtet ist.

V) Hierauf nimmt der Gehülfe B einen zweyten eben so langen Maaßstab r s, und legt solchen auf die beyden Schemmel B und C, so daß der eine Endpunkt s auf den Schemmel C, der andere aber genau an den Endpunkt r des erstern Maaßstabes n r zu liegen komme.

VI) Während sich aber B mit der Legung seines Maaßstabes beschäftiget, muß der erste n r in unverrückter Lage erhalten werden. Dieses geschiehet, wenn A den Maaßstab n r an die Tischchen, auf denen er ruhet, sanft andrückt, und allenfalls bey r, wo sich der Maaßstab nr endigt, auf dem Tischchen mit der Spitze eines Federmessers eine zarte Linie reisset, damit, wenn etwa der Endpunkt r etwas aus seiner Lage gekommen seyn sollte, die Verrückung sogleich wieder hergestellet werden könne.

Die:

Diese Vorsicht ist überhaupt bey der Legung eines jeden nächstfolgenden Maaßstabes zu beobachten.

VII) Damit nun die Richtung der zweyten Stange rs ebenfalls in die Verticalebene UY, oder in die gerade Linie mit nr zu liegen komme, so visirt A an den Stiften m und i, oder an dem Maaßstabe nr hinaus, und läßt von dem Gehülfen B den Maaßstab rs nur erst ohngefähr in die gerade Richtung UY bringen.

VIII) Hierauf setzt C auf rs die Setzwaage, und läßt von dem Gehülfen B das dritte Tischchen C erhöhen oder erniedrigen, bis rs genau horizontal liegt. Alsdann visirt A nochmals an den Stiften hinaus, damit, wenn sich die Stange rs, während sie von B in die horizontale Lage gebracht wurde, wieder etwas aus der Verticalfläche UY verrückt haben sollte, sie sogleich wieder gehörigermaaßen eingerichtet werden könne.

IX) Auf diese Art hätte man also am Ende der bisherigen Operation, in der abgesteckten Verticalfläche UY, von n bis s eine gemessene Horizontallinie von 2 Stangenlängen.

X) Um nun die Messung weiter fortzusetzen, so fängt man auf eine ähnliche Art eine neue Operation an. Sobald nämlich B mit

der

der Legung seines Maaßstabes fertig ist, so nimmt A sein Tischchen über U weg, und bringet solches nach α; B aber erhält seinen Maaßstab rs in unverrückter Lage und bedient sich der Vorsicht (VI).

XI) Hierauf legt A den von U zugleich mitgenommenen Maaßstab, auf die beyden Tischchen bey C und α. Nämlich, dessen einen Endpunkt genau an s, den andern t aber auf das Tischchen bey α. Wenn dieß geschehen, so wird st erstlich in die gerade Linie UY gerichtet, und dann horizontal gestellt, völlig nach eben dem Verfahren, dessen sich vorhin B bediente, den Maaßstab rs zu legen.

XII) Solchergestalt geht die Arbeit beständig fort, indem A und B wechselsweise immer ihre Tischchen näher nach Y hinbringen, und ihre Maaßstäbe an einander legen, bis sie an den Endpunkt Y der auszumessenden Linie hinkommen.

XIII) Während der ganzen Messung, versteht sich, müssen die Stangen gezählt werden; Um hiebey nicht zu irren, so zählt A, Eins, sobald der Maaßstab von A nach B gehörig liegt. Ist hierauf B mit der Legung seines Maaßstabes fertig, so zählt B Zwey.

Ist nun A wiederum von C bis α fertig, so zählt er Drey; dann zählt B wiederum

Viere

Viere u. s. w. So kommen auf diese Art an A immer ungerade Zahlen, an B aber die geraden.

So bald nun z. E. B einmal eine ungerade Zahl zählen sollte, so zeigt dieses an, daß im Zählen ein Fehler vorgefallen ist, und so wäre dieses Verfahren, die Stangen zu zählen, eine Prüfung, ob richtig gezählet wird. Um übrigens das Gedächtniß nicht zu beschweren, so können A und B ihre Zahlen auch in ein Manual eintragen.

Diese Methode des Zählens wird von verschiedenen Schriftstellern empfohlen. Vielleicht wäre es nicht überflüssig, auch an jeder Station ein kleines Zeichenstäbchen, worauf die Zahl jeder Station geschrieben ist, zurückzulassen. Man kann, um keine Stange zu überzählen, nicht vorsichtig genug seyn.

XIV) Um das Zählen zu ersparen, könnte auch C eine gewisse Menge von Rechenpfennigen bey sich führen, und denen B und A, nach der jedesmaligen Anlegung des Maaßstabes, einen davon zureichen.

So brauchte man nur, wenn die ganze Messung zu Ende ist, die Menge der von A und B eingesammleten Rechenpfennige zusammen zu zählen, um zu erfahren, wie viel

ganze Stangenlängen, die ausgemessene Linie enthielte.

Gesetzt bey β endigte sich ein angelegter Maaßstab tβ, und das Stück βg, bis ans völlige Ende, betrage keine ganze Stangenlänge, so fälle man von dem horizontalen Maaßstabe βo, ein Loth auf Y herunter, so bestimmt sich auf βa, die Länge des letzten Stücks βg.

Es verstehet sich aber von selbst, daß für die letzte Stange βo kein Rechenpfennig eingesammlet wird, weil von ihr nur das Stück βg, bis ans völlige Ende der auszumessenden Länge, genommen wird.

Um nun endlich, die ganze Länge ng zu erfahren, so setze man, die Länge der beyden gleich großen Maaßstäbe, deren sich A und B bedient haben, betrage 5′. Von n bis β habe man 100 Rechenpfennige eingesammlet, und das letzte Stück βg sey $= 3' 5'' 4'''$ gefunden worden.

So wird der ganze Horizontalabstand ng $= 100 . 5' + 3' 5'' 4''' = 503' 5'' 4'''$.

XV) Auf diese Art kann man mit sehr grosser Genauigkeit eine gerade Linie auf dem Felde messen. Allein man siehet leicht, daß eine

Mes-

Messung mit Stäben nicht so geschwind als mit der Meßkette von statten gehen kann. Indessen geben die Maaßstäbe die Messungen weit schärfer, und da man in manchen Fällen eine sehr große Genauigkeit verlangen kann, so habe ich zeigen müssen, wie man seine Absicht erreichen könne.

Statt der Schemmel, deren ich mich bisher, bey Ausmessung einer Linie mit Maaßstäben bedient habe, kann man sich noch einer andern, aber etwas weitläuftigern Vorrichtung bedienen, die Hr. v. Osterwald (Abh. der Churfürstl. Bayrischen Acad. der Wissensch. Erst. Band. II. Th. S. 62) vorschlägt. Nämlich, man läßt in die Verticalfläche, in der eine Linie gemessen wird, von 20 zu 20 Schuhen, etwa 4 Schuh hohe viereckigte Pfähle in die Erde schlagen. An diese befestigt man Latten in wagrechtem Stande, und misset auf ihnen, wie auf einer Brücke, her, dergestalt, daß man jeden nächstfolgenden Maaßstab, genau an das Ende des nächst vorhergehenden anlegt. — Man kann etwa nur zehn solcher Pfähle auf einmal einschlagen, und wenn man auf ihnen hergemessen hat, die hintersten wieder ausziehen, eine neue Brücke machen, und so die Messung, so weit man will, fortsetzen, ohne daß man der Gefahr ausgesetzt ist, die Meßstangen während der Arbeit zu verrücken. — Bey diesem Verfahren ist nur zu bemerken, daß

daß die Stellen, wo die Pfähle zu den Brük-
ken gestanden, sorgfältig, vermittelst kleiner Zei-
chenstäbchen die man hinlänglich tief in den Bo-
den einschlägt, bezeichnet werden müssen, damit,
wenn man zur Prüfung der Arbeit, die Mes-
sung noch einmal rückwärts vornehmen will,
die Brücken wieder auf eben die Art zu stehen
kommen, wie sie bey der ersten Messung stan-
den. — Diese Vorrichtung Hrn. von Oster-
walds kann allerdings in der practischen Geo-
metrie mit Nutzen gebraucht werden, wenn eine
sehr lange Grundlinie mit großer Sorgfalt ge-
messen werden soll.

In dem zweiten Theile des zweiten Bandes
der erwähnten Abhandlungen der Bayerischen
Acad. der Wissensch. (S. 365) findet sich noch
eine andere Abhandlung des Hrn. v. Oster-
wald, die einen Bericht über die Messung ei-
ner Grundlinie von München bis Dachau ent-
hält, woselbst die erwähnte Methode auf Pfäh-
len herzumessen, noch umständlicher und mit Er-
wägung aller Punkte auf die man überhaupt bey
Messung sehr langer Linien Rücksicht zu neh-
men hat, ausgeführt ist. Auch befindet sich da-
selbst S. 378 eine Tabelle für die Veränderun-
gen der Länge eines zwölfschuhigten Maaßstabes
von Tannenholz, bey verschiedenen Graden der
Wärme.

Ist kein so hoher Grad der Genauigkeit erforderlich, so ist hinreichend, längs der auszumessenden Linie UY blos eine Meßschnur auszuspannen. Dann nehmen zwey Gehülfen ein paar Maaßstäbe, und legen sie wechselsweise längs der Meßschnur an einander. Aber auf den Ungleichheiten des Bodens, wird sich dann freylich die horizontale Lage der Maaßstäbe so genau nicht erhalten lassen.

XVI) Handwerksmässige Feldmesser spannen oft nicht einmahl eine Schnur in die abgesteckte gerade Linie aus; damit weichen sie alle Augenblicke von der geraden Richtung ab, und begehen aus Nachlässigkeit oft andere, noch weit beträchtlichere Fehler, wie ich in der Folge zeigen werde.

Anmerkung.

§. 40. Wie genau man, vermittelst der Maaßstäbe, gerade Linien ausmessen könne, zeigen die Ausmessungen, die die Pariser Academisten, zur Bestimmung der Figur und Größe unserer Erdkugel angestellt haben.

So wurde in Lappland zwischen Torneo und Kitti eine Grundlinie von 7406 Toisen und 5 Schuhen zu verschiedenen mahlen gemessen, und man fand nur einen Unterschied von 4 Zollen bey wiederholten Messungen; dieses ist bey einer so großen Linie eine Genauigkeit, die man kaum erwarten sollte.

Di-

Die Messung einer solchen Linie wurde in 7 Tagen vollendet.

Meistens ist in der practischen Geometrie keine so gar große Schärfe nöthig, und aus dieser Ursache bedienet man sich mit Vortheil der Meßkette.

Daß aber der Gebrauch der Kette, auf einem ebenen Boden, zureichend genau ist, davon hat sich Marinoni (de re ichnog. p. 245) durch mehrere Versuche überzeugt.

Er maaß z. B. auf einem horizontalen Boden, vermittelst zweyer Maaßstäbe von 6 Wiener Fußen, eine gerade Linie von 110 Stangenlängen, oder 660 Wiener Fußen zu wiederholten malen.

Nun maaß er die nämliche Länge mit einer vorher wohl geprüften Kette, und gebrauchte dabey alle nöthigen Vorsichten. Die Meßkette hielt genau 60 Wiener Fuß.

Wie die Messung zu Ende war, so erreichte der 11te Kettenzug, völlig genau den Endpunkt der abgesteckten, und vorher mit Maaßstäben ausgemessenen Länge.

Und so zeigte sich, daß eben diese Linie, vermittelst der Meßkette gemessen, 11. 60′. = 660′ betrug, zum Beweise, wie genau e Messungen mit Stäben und mit der e, übereinstimmten. Die

Die Zeiten aber, in denen die Messungen vollendet wurden, waren sehr von einander unterschieden. Beym Gebrauch der Maaßstäbe wurde immer $\frac{1}{4}$ Stunde Zeit erfordert. Mit der Kette wurde aber eben die Länge innerhalb 5 Minuten gemessen.

Marinoni macht also hieraus den Schluß, daß es in der Feldmeßkunst, bey Messungen auf ebenem Boden, in allem Betrachte vortheilhaft sey, sich der Meßkette zu bedienen.

Aehnliche Versuche findet man in Bugge's oben (§. 31.) angeführter Schrift. Hr. B. schließt aus seinen Versuchen, daß man bey Anwendung der nöthigen Vorsichten den absoluten Fehler der Kettenmessung auf ebenen und horizontalen Boden setzen könne = 1 Elle auf 1000 Ellen. Auf einem wenig steigenden oder fallenden Boden = $1\frac{1}{2}$ Elle und auf einem sehr hügelichten und unebnen Lande = 2 Ellen auf 1000. Die Messung mit der Kette gab immer weniger als die Ausmessung mit Stäben.

Aufgabe.

§. 41. Auf einer sehr abhängigen Fläche, den Horizontalabstand zweyer gegebenen Punkte zu finden.

Auflösung. 1) Gesetzt (Fig. XVI) A und G seyen auf dem Felde ein paar Punkte, zwischen denen sich ein hoher und stark abhängen

gender Hügel befinde: Man soll den Horizontalabstand der beyden Punkte A und G finden.

Das will sagen, wenn man sich durch A eine Verticallinie Aα gedenkt, und durch G eine Horizontallinie Gα, welche gedachte Verticallinie in α durchschneidet, so soll man die Länge Gα finden.

II) Um also dieses zu leisten, stecke man zwischen A und G über den Hügel eine Verticalebene ab, vermittelst der bey M, N, R, hinzusetzenden Absteckstäbe (§. 32. IV.)

III) Nun sey erstlich (Fig. XI) die schiefe Linie μ m c ein Stück von der abhängigen Richtung des Hügels. Man setze in c die Spitze des Maaßstabes a b c (§. 34. IV) und bringe solchen, vermittelst des an dem Stift t herabhängenden Lothes, in eine verticale Lage.

Darauf nehme man einen zweiten Maaßstab m n; setze dessen einen Endpunkt m an die Anhöhe, und schiebe m n an a b so lange auf und nieder, bis eine auf m n gestellte Setzwaage, die horizontale Lage des Maaßstabes m n anzeigt.

Auf dem Maaßstabe a b c ist nun, nach der Mitte herunter, eine gerade Linie a b gezogen, auf der sich Abtheilungen von b gegen a, in Fuße, Zolle und Linien befinden; auch liegt die gerade Linie a b in der Verlängerung des Stifts b c, welcher in dem Boden steckt.

Ferner

Ferner sind auch auf dem horizontalen Maaßstabe, von m gegen n, Abtheilungen in Fuße u. s. w. verzeichnet.

Man untersuche also, wie viel Fuße, Zolle und Linien, die verticale Linie ab, auf dem horizontalen Maaßstabe, von m bis l abschneidet, so hat ml, oder den Horizontalabstand der beyden Punkte m und b.

Und wenn man by horizontal, my vertical sich gedenkt, so ist ml = by.

IV) So wie also hier in der XI. Fig. des schiefen Stücks mc Horizontalweite ml gefunden worden, so wird in Fig. XVI über den ganzen Hügel AwRNMG, die Arbeit fortgesetzt, und die ganze Horizontalweite Gα stückweise gesucht.

Nämlich gleich bey G (Fig. XVI) wird der Maaßstab Ga vertical eingesetzt, der horizontale mn aber, so angelegt, daß er sich in der abgesteckten Verticalebene befinde; dieses kann man leicht bewerkstelligen, wenn man hinter Ga das Auge hält, und an dem Maaßstabe nm hinaus, nach der nächsten Absteckstange M visiret.

Nimmt man darauf, wie in Fig. XI gewiesen, von m nach l, die Anzahl von Fußen, Zollen und Linien, so hat man erstlich die Horizontalweite ml des schiefen Stücks mG.

Nun gehe man weiter: Nachdem vorher genau der Punkt m auf dem Boden bemerkt worden, wo der Endpunkt des horizontalen Maaßstabes hinreichte, so nehme man den verticalen Stab von G weg, und setze ihn in m ein; dann lege man wieder, wie vorhin, den horizontalen an; und bestimme auf ihm die Horizontalweite ki, des schiefen Stücks km.

Auf diese Art setzt man, wie die punktirten Linien ausweisen, die Messung über den ganzen Hügel fort, und bemerkt jedesmal in dem Diario, die gefundene Horizontalweite.

V) So giebt endlich die Summe aller gemessenen horizontalen Stücke ml + ki + xo + Nr + Nv + ts + wy, wie sich leicht übersehen läßt, die ganze Horizontalweite Gα, und die vorgelegte Aufgabe wäre aufgelöset.

Zusatz.

§. 42. Wollte man die wahre Weite von A nach G bestimmen, so müßte man ausser der horizontalen Weite Gα, auch noch die Erhöhung des Punkts A über G, oder die Linie Aα wissen.

Diese bestimmt sich so:

Da Fig. XI. auch von dem horizontalen Maaßstabe mn, die Abtheilungen auf dem verticalen ba, abgeschnitten werden, so ergiebt sich

zu

zu gleicher Zeit dadurch die Linie bl, oder die Erhöhung des Punkts m über c.

Solchergestalt erhält man in Fig. XVI. bey jeder Station, sowohl die Erhöhungen Gl, mi, ko, xr auf der einen Seite des Hügels, als auch die Erhöhungen vs, tw, Ay; auf der andern Seite desselben.

Man ziehe von dem höchsten Punkte N eine Verticallinie Nz auf Gα; und durch A die Linie AX horizontal.

So erhellet folgendes: die Summe der Erhöhungen Gl + mi + ko + xr auf der einen Seite des Hügels, giebt die Erhöhung des Punkts N über G, oder die Linie Nz:

Die Summe vs + tw + Ay giebt aber die Erhöhung des Punkts N über A, oder die Linie NX.

Ziehet man nun von NZ die Linie NX ab, so erhält man XZ oder Aα; folglich die gesuchte Höhe des Punkts A über G.

Hieraus ist endlich, nachdem Aα gefunden worden; die wahre Weite $AG = \sqrt{(G\alpha^2 + A\alpha^2)}$.

Sollten auf dem Wege von G nach N auch Vertiefungen vorkommen, so muß man solche als negative Erhöhungen ansehen.

Zusatz.

§. 43. Die krumme Linie AwRNMG ist die Durchschnittsfigur einer Verticalebene, mit der krummen Fläche des Hügels.

Gedenkt man sich nun, von jedem Punkte dieser krummen Linie, ein Loth auf die Horizontalfläche herab, reducirt man die krumme Linie z. E. auf den Horizont durch G (§. 4.) so erhält man die gerade Linie Gα, für die Projection der krummen Linie auf diese Horizontalfläche.

Begreiflich wird aber die nach der Aufgabe §. 41 gemessene Horizontalweite Gα, auch der Projection der krummen Linie AwRNMG z. E. auf den Horizont durch A, gleich seyn.

Anmerkung.

§. 44. Einige bedienen sich bey Messungen über Anhöhen, nicht der Maaßstäbe, sondern blos der Meßkette, und verfahren dabey auf folgende Art:

Statt Anlegung eines horizontalen Maaßstabes mn (Fig. XVI.) befestigen sie in m den einen Endpunkt der Kette, spannen hierauf ein Stück von ihr horizontal aus, bis an den verticalen Stab Ga, und bestimmen so auf der Kette die Horizontalweite ml.

Ohne

Ohne Zweifel wird man aber weit bequemer und richtiger sich bey dieser Aufgabe blos der Maaßstäbe bedienen.

Man kann auch, wie in der Folge erhellen wird, die Horizontalweite Gα noch auf andere Arten bestimmen. Dieses setzt aber Kenntnisse des Winkelmessens zum voraus.

Will man die Erhöhung des Punktes A über G, und zwar, wie zu einigen Absichten erfordert wird, mit sehr großer Schärfe bestimmen, so gehört dies ins Kapitel vom Nivelliren, wovon in der Folge ebenfalls der gehörige Unterricht ertheilt werden soll.

Von den Fehlern, die man in der Messung einer geraden Linie begehen kann.

§. 45. Die Fehler, denen man bey diesem Geschäfte ausgesetzt ist, hängen theils von der Unvollkommenheit der Werkzeuge ab, theils aber auch von der Nachlässigkeit des Geometers, und von der Unmöglichkeit, eine völlig mathematische Genauigkeit zu erhalten. Man muß aber solche zu beurtheilen wissen, und dieß soll in folgenden Zusätzen geschehn.

Fehler aus der Unvollkommenheit der Werkzeuge.

I) Diese hängen von der Größe und Eintheilung der Meßketten und Maaßstäbe ab.

Es versteht sich von selbst, daß eine Kette nicht allein die angebliche Größe würklich besitze, sondern auch richtig in Ruthen und Fuße abgetheilt sey. Wenn eine Kette gerade 5 rheinländische Ruthen lang seyn sollte, in der That aber etwas länger oder kürzer wäre, so würde bey jedem Kettenzuge ein Fehler begangen. Man muß daher die angebliche Länge der Kette, das will sagen, die Entfernung ihrer beyden Endpunkte vorher wohl prüfen, ehe man Messungen anstellt.

Die Art, wie diese Prüfung geschehen könnte, wäre etwa folgende:

Man verzeichne auf einem Maaßstabe, mit aller möglichen Sorgfalt, die Länge einer solchen Ruthe, dergleichen die Kette z. E. 5 enthalten soll, und bestimme mit diesem Maaßstabe auf einem ebenen Boden, so genau als möglich, eine Länge von 5 Ruthen. Dann bringe man die Meßkette an diese abgesteckte Länge, und untersuche, ob nach gehöriger Ausspannung derselben, ihre beyden Endpunkte völlig genau die 5 Ruthen zwischen sich enthalten. Den Versuch kann man einigemahle wie-

der-

derholen, und sich so von der eigentlichen Größe der Meßkette versichern. Fände man z. E. die Kette um 2 Zoll länger, als 5 Ruthen, so müßte man in der Folge für jeden Kettenzug nur 5 Ruthen weniger 2 Zoll, oder 4° 9′ 8″ rechnen.

Diese Prüfung der Kette ist besonders in dem Falle nothwendig, wenn sie schon lange gebraucht worden. Denn es lehrt die Erfahrung, daß die Glieder oder Gelenke sich mit der Zeit in ihren Ringen abnutzen und ausschleifen, wodurch die Kette verlängert wird.

Ferner biegen sich auch beym Gebrauch die Glieder etwas krumm, und dieser Umstand verkürzt die Kette; daher muß man beständig darauf sehen, daß die Kettenglieder gehörig gerade sind.

II) Einige rathen, man solle eine sehr lange Linie z. E. von 100°, erst mit Maaßstäben, und dann mit der Kette messen, beyde Messungen mit einander vergleichen, und aus dem gefundenem Unterschiede die wahre Länge der Kette bestimmen. Die Ursache, warum man zur Prüfung der Kette eine sehr lange Linie vorschlägt, ist, weil ein in der Kettenlänge enthaltener Fehler sich bey oft wiederholten Kettenzügen häuft, und daher bey einer sehr langen Linie sichtbarer ausfällt, als bey einer kurzen.

Fehler aus Unvorsichtigkeit.

§. 46. Diese sind beym Gebrauch der Meßkette hauptsächlich folgende.

I) Wenn man nicht in jedem Falle die Glieder der Meßkette gehörig auseinander legt, und wenn sich einige krumm gebogen, sie wieder in eine gerade Richtung bringt.

II) Wenn man in Einsetzung der Kettenstäbe nachlässig ist, d. h. wenn mau nicht jederzeit die Stachel genau in das Loch setzt, wo ein Zeichenstäbchen gestanden. Aus dieser Quelle entspringen die meisten und beträchtlichsten Fehler. Besonders hat man alle nöthige Vorsicht zu beobachten, wenn man über weiches Erdreich wegmisset. Hier kann es gar leicht geschehen, daß, wenn der vordere Kettenzieher die Kette schlenkert und anzieht, der Kettenstab des nachfolgenden, in dem weichen Boden nachgiebt, große Löcher bohrt, und sich so aus seiner wahren Stelle verrückt; daher muß man in solchem Falle sehr behutsam verfahren.

III) Wenn die Kette nicht gehörig angespannt wird.

IV) Wenn man bey jedem Kettenzuge von der geraden Linie oder Verticalfläche abweicht.

V) Wenn man bey der gewöhnlichen Einrichtung, da sich die Stachel an der Seiten-

fläche

fläche des Kettenstabes befindet (§. 34. II) nicht bey jedem Kettenzuge untersucht, ob sich die Endpunkte der äussersten Ringe noch gehörig über der Stachel der Kettenstäbe befinden.

Etwas über die Beträchtlichkeit des Fehlers, dessen in IV erwähnet worden.

§. 47. Ich will annehmen, es sey auf dem Felde (Fig. XVII) die gerade Linie ah ausgemessen worden, man sey aber während der Messung nicht immer auf der geraden Linie ah geblieben, sondern z. E. bey dem ersten Kettenzuge ac um das Perpendikel bc, bey dem zweyten Kettenzuge um de, bey dem dritten df um gf u. s. w. von der geraden Richtung ah abgewichen. Auch sey fh der letzte Kettenzug. So würde man also für die ausgemessene Länge ah hier z. E. 4 Kettenzüge ac + cd + df + fh oder 4. 5° = 20° rechnen.

Es ist aber, weil man immer von der geraden Richtung abgewichen, in der That ab um etwas kleiner als ac + cd + df + fh, und man giebt also die ausgemessene Linie ah zu groß an, wenn man sie = 20° setzt.

Um nun zu finden, ob der hieraus zu befürchtende Fehler beträchtlich seyn kann, so will ich annehmen: Es seyen die bey jedem Kettenzuge begangenen Abweichungen von der geraden

Rich

Richtung, oder die Perpendikel bc, de, gf gegeben.

Weil nun gewiß, wenn man auch nur mittelmäßig misset, die Abweichungen von der geraden Richtung, nicht sehr beträchtlich seyn können, so werden die Perpendikel bc, de, gf, in Absicht der ganzen Kettenlänge, sehr klein seyn.

Es sey die Kettenlänge

$$= r = ac = cd = df = fh$$

So ist in dem rechtwinklichten Dreyecke acb

$$ab = \sqrt{(ac^2 - bc^2)} = \sqrt{(r^2 - bc^2)}$$

$= r\sqrt{\left(1 - \frac{bc^2}{r^2}\right)}$; weil nun bc gegen r sehr klein, folglich auch $\frac{bc}{r}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so kann man ohne merklichen Fehler setzen $\sqrt{\left(1 - \frac{bc^2}{r^2}\right)} = 1 - \frac{bc^2}{2r^2}$ (Tr. S. IX) und mithin $ab = r - \frac{bc^2}{2r}$.

Nun verlängere man ferner de, und ziehe cγ parallel mit be, so ist in dem rechtwinklichten Triangel cdγ.

$c\gamma = be = \sqrt{(cd^2 - d\gamma^2)} = \sqrt{(r^2 - (de + bc)^2)} =$

$r\sqrt{\left(1 - \frac{(de+bc)^2}{r^2}\right)} = r - \frac{(de+bc)^2}{2r}$,

weil eben so, wie vorhin, der Bruch $\frac{de + bc}{r}$ sehr klein ist.

Völlig eben so wird $eg = r - \frac{(de+gf)^2}{2r}$

und $gh = r - \frac{gf^2}{2r}$ folglich

$ah = ab + be + eg + gh =$

$4r - \frac{bc^2 + (bc + de)^2 + (de + gf)^2 + gf^2}{2r}$

oder wenn man der Kürze halber die Summe der Quadrate

$bc^2 + (bc + de)^2 + (de + gf)^2 + gf^2 = C$

setzet, so wird

$$ah = 4r - \frac{C}{2r}$$

das will sagen, die Linie ah ist hier um die Größe $\frac{C}{2r}$ kleiner, als 4 Kettenlängen, oder $\frac{C}{2r}$ ist der Fehler, den man begehet, wenn man bey der Messung nicht beständig auf der geraden Richtung bleibt.

Ich habe in der Figur angenommen, daß jede zwey nächst aufeinander folgende Abweichungen, wie bc, de auf verschiedenen Seiten der Linie ah liegen. Fielen aber z. E. bc, de auf einerley Seite, so wird ein kleines Nachdenken zeigen, daß man alsdann in dem Werthe von C nur $(bc - de)^2$ statt $(bc + de)^2$ setzen müsse.

Man setze, die Abweichungen, die man bey jedem Kettenzuge begeht, seyen alle gleich groß, oder es sey $bc = de = gf = \varepsilon$ so wird

$$C = \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^2 = 10\varepsilon^2$$

folglich $ah = 4r - \frac{10\varepsilon^2}{2r} = 4r - \frac{5\varepsilon^2}{r}$.

Hätte man überhaupt von a bis h, n Kettenlängen gezählt, so würde, wie leicht erhellet, alsdann

$$C = \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 \ldots\ldots + \varepsilon^2$$
$$= \varepsilon^2 + 4(n - 2)\varepsilon^2 + \varepsilon^2 = (4n - 6)\varepsilon^2.$$

Und daher in diesem Falle

$$ah = n.r - \frac{(4n - 6)\varepsilon^2}{2r} = n.r - \frac{(2n - 3)\varepsilon^2}{r}$$

Um ein Exempel zu geben, so will ich annehmen $r = 5° = 500''$, und setzen, bey jedem Kettenzuge weiche man um $5''$ von der geraden Richtung ab. Dies ist eine Abweichung, die, n auch nur mittelmäßig gemessen wird, nicht

leicht

leicht statt finden kann. Ferner sey n = 20, so wird der Werth von

$$ah = 20 . 5^{\circ} - \frac{(2 . 20 - 3)}{500} . 25.$$

In diesem Falle ist also der Fehler, um den man ah zu groß angäbe, wenn man sie 20 Kettenlängen gleich setzte, oder die Größe

$$\frac{C}{2r} = \frac{(2 . 20 - 3)}{500} . 25 \text{ Zolle} = 1{,}85 \text{ Zoll.}$$

D. h. man begienge in der ganzen Länge nur einen Fehler von 1,85 Zollen, wenn man gleich bey jedem Kettenzuge um 5 Zoll von der geraden Richtung abwiche, und dieses ist ein Fehler, der in Absicht der ganzen Länge von 20 Kettenzügen sehr unbeträchtlich ist.

Noch einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 48. I) Aus der Formel $\frac{C}{2r} = \frac{(2n-3) . e^2}{r}$ erhellet, daß der Fehler, den man in Messung einer Linie, wegen den Abweichungen von der geraden Richtung, begehen kann, sich bey einerley r und n, d. h. bey gleich grossen und gleich vielen Kettenzügen, verhalten würde wie e^2, oder wie das Quadrat der Abweichung von der geraden Linie;

II) Der Bruch $\frac{C}{2r} = \frac{bc^2 + (bc + de)^2 \ldots}{2r}$ §. 47 wächst, wenn C grösser wird, und r abnimmt, das will sagen: der Fehler, den man in einer ausgemessenen Länge, wegen den Abweichungen von der geraden Richtung, zu befürchten hat, ist desto beträchtlicher, je mehr und öfter man von der geraden Richtung abgewichen, und je kürzer die Meßkette ist.

Daß man überhaupt beym Gebrauche langer Ketten bey weitem nicht so große Fehler, sowohl wegen den Abweichungen von der geraden Richtung, als auch aus andern Ursachen zu befürchten habe, erhellet noch mehr aus folgenden Betrachtungen.

Je länger eine Meßkette ist, desto weiter kommen alsdann die Kettenstäbe von einander wegzustehen, desto geringer sind also die Fehler, die beym Visiren wegen der Dicke der Kettenstäbe etwa begangen werden können, und folglich, desto weniger ist man der Gefahr unterworfen, von der geraden Richtung abzuweichen. Ferner braucht man bey einer längern Kette auch die Kettenstäbe nicht so oft einzusetzen, als bey einer kürzern. Aus dieser Ursache können also auch die Fehler §. 46. II nicht so oft vorfallen. Endlich überhaupt, je kleiner die Ketten sind, desto öfter multipliciren sich die Fehler, die man bey jedem einzelnen Kettenzuge begehen kann.

III) Es würde also vortheilhaft seyn, sich in der Ausübung so langer Ketten zu bedienen, als es Bequemlichkeit und Umstände erlauben. Freylich würden besonders in bergigten Gegenden lange Ketten alsdann einige Beschwerlichkeiten haben, sowohl beym Forttragen, als gehörigem Ausspannen derselben.

IV) Da geringe Abweichungen von der geraden Richtung keine beträchtlichen Folgen nach sich ziehen, so erhellet, daß die Fehler §. 46. IV. am wenigsten dazu beytragen, eine Messung unsicher zu machen. Hingegen sind aber die Vorsichten §. 46. I II. III. V. von desto größerer Wichtigkeit.

V. Wenn man annehmen will, daß in den meisten Fällen bey jedem einzeln Kettenzuge die Fehler §. 46 begangen werden, so erhellet, daß bey n Kettenzügen ein n mahl so großer Fehler begangen werden kann, als bey jedem einzelnen. Wenn also der größte Fehler, der bey jedem einzeln Kettenzuge, aus obigen Ursachen §. 46 zusammen genommen, entspringen kann = e gesetzt wird, so ist bey einer ausgemessenen Länge von n Kettenzügen der zu befürchtende Fehler = n.e und dieser verhält sich also wie n, oder wie die ausgemessene Linie, wenn man annimmt, daß bey jedem Kettenzuge gleich große Fehler begangen werden. Dieser Satz, daß der Fehler einer ausgemessenen Linie, der

Linie selbst proportional sey, findet sich bey Marinoni de re ichnographica, und ist desto wahrscheinlicher, je mehr die Fehler bey den einzeln Kettenzügen einander gleich und ähnlich sind.

VI) Endlich erhellet auch aus der Art, wie die Fehler §. 46 begangen werden, daß man überhaupt die ausgemessenen Linien gemeiniglich zu groß angiebt, man müßte denn auf weichen Boden messen, in welchem Falle bey einer öftern Wiederhohlung des Fehlers §. 46 II. das Maaß der Linie zu klein ausfällt.

Die gewöhnlichen Fehler, welche bey Messungen mit Maaßstäben begangen werden.

§. 49. Diese sind:

I) Wenn man in der Linie, längs der man hermisset, keine Schnur ausspannt, sondern den Maaßstab nur nach dem Augenmaaße in die gerade Richtung legt.

Dieser Fehler wird von den Feldmessern sehr häufig begangen, und kann bey sehr langen Linien große Unrichtigkeit verursachen, weil man bey der Legung des Maaßstabes nach dem bloßen Augenmaaße, alle Augenblicke der Gefahr unterworfen ist, von der geraden Richtung abzuweichen, und dieses beym Gebrauche der Maaßstäbe weit beträchtlichere Folgen nach sich zie-

ziehen kann, als bey der Kette, weil die Abweichungen öfter begangen werden;

In der Formel $\frac{C}{2r}$ §. 47 bedeute nunmehr r die Länge des Maaßstabes; da diese gewöhnlich nur 5 bis 6 Fuß beträgt, so ist der Nenner des Bruches $\frac{C}{2r}$ beym Gebrauche des Maaßstabes weit kleiner, als bey der Meßkette, wo r gewöhnlich = 50' ist. Daher wird, alles übrige gleich gesetzt, der Bruch $\frac{C}{2r}$, oder die Fehler wegen Abweichungen von der geraden Richtung, weit größer beym Maaßstabe, als bey der Kette.

II) Ein zweyter Fehler, der gewöhnlich vorzufallen pflegt, wenn man nur mit einer Stange misset, ist, wenn man die Umschläge nicht in Betrachtung zieht, die die Stange bey jeder Umwendung auf der Erde mit ihrer Dicke macht. Das will sagen, wenn die Stange die Dicke eines Zolles hätte, und man mit beständiger Umwendung des Stabes, an einer Linie hermäße, so würde man jedesmahl 1 Zoll überschlagen, und dieß betrüge also bey 10 Stangenlängen schon einen Fuß.

III) Auch erhellet leicht, daß man auf diese Art die ausgemessene Linie allezeit zu kurz angeben würde.

IV) Ein dritter Fehler, der von nachläßigen Feldmessern am häufigsten begangen wird, ist, wenn sie sich nicht die Mühe geben, den Maaßstab ganz auf die Erde niederzulegen, sondern, um sich das öftere Bücken zu ersparen, das hinterste Ende des Stabes erheben, ehe noch das vorderste den Boden erreicht hat. Die XVIII Fig. stellt solches vor Augen.

Aa ist der Stab, der in c gehalten wird.

Wenn nun der Punkt A unverrückt bleibt, bis man Aa auf den Boden niedergelegt hat, und also der Punkt a bey α den Boden erreicht, so ist $A\alpha = Aa =$ der wahren Stangenlänge. Giebt man sich aber nicht die Mühe den Stab ganz niederzulegen, sondern erhebt das Stangen-Ende A, und läßt die Stange um c, wo man sie hält, drehen, bis sie bey β den Boden erreicht, so würde man einen großen Fehler begehen, wenn man $A\beta$ für die Länge der Stange annehmen, und also $A\beta = A\alpha = Aa$ setzen wollte. Es wäre nämlich der Fehler $= \alpha\beta = A\alpha - A\beta = Aa - A\beta$.

Gesetzt, man hielte die Stange in ihrer Mitte so, daß $Ac = ca = c\beta = \frac{1}{2} Aa$ wäre, und das Perpendikel cd sey die Höhe, in der man über dem Boden die Stange zu drehen anfienge, so würde in dem gleichschenklichten Dreyecke $Ac\beta$ $A\beta = 2d\beta = 2\sqrt{(c\beta^2 - cd^2)} = 2\sqrt{(\frac{1}{4}Aa^2 - cd^2)}$

folg-

folglich der Fehler $\alpha\beta = Aa - A\beta =$
$Aa - 2\sqrt{(\frac{1}{4}Aa^2 - cd^2)}$.

Ex. Gesetzt, die Stangenlänge Aa sey $= 6'$ und wie man gewöhnlich setzen kann $cd = 1\frac{1}{2}' = \frac{3}{2}'$ so wird $\alpha\beta = 6' - 2\sqrt{(9 - \frac{9}{4})} = 6 - \sqrt{27} = 6 - 3\sqrt{3} = 0{,}84' = 8'' \, 4'''$. Diesen Fehler würde man also bey jeder Stangenlänge begehen, und daher beym Fortgange der Messung sehr beträchtlich irren, wenn man immer $A\beta$ für eine Stangenlänge rechnen wollte.

Anmerkung.

§. 50. Die bisherigen Betrachtungen werden nicht unnütz seyn, in keinem gegebenen Falle, die Genauigkeit einer Messung zu beurtheilen, und sowohl die zufälligen, als vorsetzlichen Fehler zu schätzen.

I) Indessen gehören hieher auch diejenigen Fehler, welche daher rühren, daß fast alle Materien sich durch Wärme ausdehnen, und durch Kälte wieder zusammenziehen, mithin auch Maaßstäbe und Ketten, bey unterschiedenen Graden der Temperatur, nicht ganz genau einerley Länge behalten, welches zumal bey Messung langer Linien von einem nicht ganz unerheblichen Erfolge seyn kann.

II)

II) Eben so lehrt auch die Erfahrung, daß wenn hölzerne Maaßstäbe Feuchtigkeiten einsaugen, sie einige Veränderungen ihrer Länge erfahren, und kürzer werden, so lange diese Feuchtigkeiten in den Zwischenräumen nicht gefrieren. Kommen sie aber in eine große Kälte, so hält es v. Maupertuis (Oeuvres de Mr. Maup. Lyon 1756. T. III. p. 144.) für wahrscheinlich, daß sie sich alsdann nicht, wie andere Materien zusammenzögen, sondern ausdehnten, weil die Feuchtigkeiten in ihnen gefrören, und das Eis einen grössern Raum einnimmt, als das Wasser, woraus es entstanden ist.

So dehnte sich, nach Celsius Versuchen, eine hölzerne Stange, welche einer Temperatur von 14 Reaum. Graden über den Gefrierpunkt ausgesetzt war, um $\frac{1}{3000}$ ihrer Länge aus, als sie in eine Kälte von 14 Graden unter dem Gefrierpunkt gebracht wurde.

III) Wegen (II) ist es daher vortheilhaft, die hölzernen Maaßstäbe, ehe man die Abtheilungen darauf macht, mit einer Oelfarbe anzustreichen, und wenn diese wohl getrocknet, sie noch mit einem Lakfirniß zu überziehen.

IV) Bey Messungen, welche eine sehr grosse Schärfe erfordern, muß man allerdings die Fehler einigermaaßen kennen, die aus den in (I) erwähnten Ursachen zu befürchten sind, und

aus

aus Versuchen über den Einfluß der Wärme oder Kälte auf diese oder jene Materien, woraus die Maaßstäbe verfertigt werden, die Correction einer gemessenen Linie zu berechnen wissen, wie z. E. von Bouguer und andern geschehen ist, welche Messungen über die Figur der Erde angestellt haben.

V) So hat Condamine gefunden, daß ein eiserner Maaßstab von 6 pariser Fußen, sich ohngefähr um $\frac{1}{87}$ einer Linie verlängert, wenn die Wärme nach dem Reaumürschen Thermometer um 1 Grad zunimmt. Ueberhaupt beträgt, nach Don Juans Versuchen (Voy. hist. de l'Amerique merid. Tom. II. P. II. pag. 90) die Verlängerung einer eisernen Stange für eine Veränderung von 10 Graden des Reaumürschen Therm. ohngefähr 0,0003 ihrer Länge, einer kupfernen Stange 0,00044, einer gläsernen 0,00008 ihrer Länge. Die Versuche anderer weichen hievon etwas ab, wie man aus Lamberts Pyrometrie §. 217 sehen kann. Man sehe auch hierüber Lowizens Gedanken von Ausdehnung der Metalle bey Maaßstäben, im Staatsgeographus II Beylage, und *Berthoud Essai sur l'horlogerie* 1763. T. II. p. 113. Nach den Angaben Bouguers, Smeatons, Hallströms, würden die angeführten Ausdehnungen weit geringer seyn. M. s. meine Anfangsgründe der Naturlehre, 3te Aufl. Gött. 1812. p. 245.

VI) Werkzeuge zu Versuchen über die Ausdehnung der Metalle findet man in *Musschenbroek Tentam. Exp. nat. Acad. del Cimento* P. II. p. 12 und in dessen *introd. in Phil. naturalem.* §. 1527. Hieher gehört auch *Smeaton's description of a new pyrometer, with a Table of experiments made with them* in den *Phil. Transactions* Vol. XLVIII. P. II. p. 598.

VII) Weil metallene Maaßstäbe ihrer Schwere wegen, etwas unbequem sind, so hat sich der Generalmajor William Roy, bey Gelegenheit der Abmessung einer Grundlinie auf Hounslowheath, um eine Reihe von Dreyecken zwischen London und Dover mit den bereits in Frankreich gemessenen zu verbinden, mit großem Vortheil gläserner, 20 Schuh langer vollkommen gerader Stäbe, bedient (*Phil. Trans.* Vol. 75). Auch hatte Ramsden eine Kette zu dieser Arbeit verfertigt, um zu sehen, wie die Messungen mit der Kette und diesen Maaßstäben übereinstimmen würden. Die Einrichtung dieser Kette verdient nachgeahmt zu werden. Die Messungen wurden mit aller ersinnlichen Genauigkeit angestellt, und so übereinstimmend gefunden, daß der Unterschied, wie pyrometrische Versuche auswiesen, blos von der verschiedenen Ausdehnung des Glases und des Metalles der Meßkette herrührte. Ein neuer Beweis, daß man auch mit Ketten, bey gehöriger Vorsicht, sehr genau messen kann.

Borda hat den Meßstangen, welche bey der neuen Gradmessung in Frankreich gebraucht wurden, die Einrichtung gegeben, daß sie zugleich selbst als Thermometer dienen, um nach Verhältniß ihrer verschiedenen Temperatur die Correctionen der gemessenen Grundlinien zu bestimmen. Eine kurze Nachricht hievon in Hrn. v. Zachs G. Ephem. Jul. 1798. S. 77.

VIII) In der gemeinen Feldmeßkunst würde es eine gesuchte und überflüssige Genauigkeit seyn, wenn man so geringe Veränderungen wegen Wärme und Kälte in Betrachtung ziehen wollte, überdem da während einer Messung gewöhnlich Fehler begangen werden, die beträchtlicher sind, als alle Veränderungen, die die Werkzeuge durch Wärme, Kälte und Feuchtigkeit erleiden.

Wenn man nur Meßstangen von gutem trockenem Holze gebraucht, so lehret die Erfahrung, daß sie auch bey beträchtlichen Abwechselungen der Wärme und Kälte dennoch immer sehr gute Dienste leisten.

Einige Methoden, Entfernungen nur ohngefähr zu bestimmen.

§. 51. I) Zu dieser Absicht kann man sich des Schalles bedienen. Solcher legt in einer Zeitsecunde bekanntermaaßen ohngefähr 1040

pariser Fuß zurück, welches also 20 Sec. auf eine deutsche Meile bringt. Man kann also das Echo, oder auch den Schall bey Lösung eines Geschützes u. d. gl. auf folgende Art gebrauchen:

Da man das Feuer eines entfernten Geschützes in dem Augenblicke siehet, da es gelöset worden, so zähle man nur die Secunden, die verfliessen, bis man den Knall hört, und und rechne für jede Secunde 1040 Fuß, so hat man die Weite von dem Geschütze innerhalb 1040 Fußen. Denn hat man kein Mittel, kleinere Zeittheile als Secunden anzugeben, so wird man auch, vermittelst des Schalles schwerlich eine grössere Genauigkeit verlangen können.

Wenn man eine gute Taschenuhr bey der Hand hat, so kann man auch diese gebrauchen, die verflossene Zeit, von dem Augenblicke an, da man das Feuer sieht, bis zu demjenigen, da man den Knall hört, zu bestimmen. Nämlich, man zählt die Schläge der Taschenuhr, und da ohngefähr 150 Schläge eine Minute oder 60 Secunden ausmachen, so läßt sich in diesem Verhältniß jede gefundene Menge von Uhrschlägen, in Secunden ausdrücken.

Auf der göttingischen Sternwarte befindet sich eine Tertienuhr, die man bequem in der Tasche mit sich führen kann, und von dem da-

sigen

sigen geschickten Uhrmacher Klindworth, verfertiget ist. Sie wird in einem viereckigten Gehäuse durch eine Feder getrieben, und die Vorrichtung ist so gemacht, daß man in dem Augenblicke, da man das Feuer sieht, die Uhr in Bewegung setzen, sie fortgehen lassen kann, und sie in dem Augenblicke, da man den Schall hört, wieder zum Stillstehen bringen, und vermittelst der Zeiger auf dem Zifferblatte, die verflossenen Minuten, Secunden und Tertien zählen kann. Durch Hülfe einer solchen Tertienuhr, die jetzt auch sehr bequem in Form einer Taschenuhr verfertigt werden, würde man also weit genauer, die Weiten vermittelst des Schalles bestimmen können.

Es wird offenbar in vielen Fällen sehr bequem seyn, nach dem gewiesenen Verfahren, Weiten durch den Schall zu finden, besonders wenn keine gar zu grosse Schärfe verlangt wird.

Um indessen eine Probe zu geben, daß sich auch Weiten, vermittelst des Schalles, sehr genau bestimmen lassen, wenn man mit einer Tertienuhr versehen ist, so führe ich einige Beobachtungen an, welche 1779 auf Veranlassung und in Gegenwart Hrn. Hofr. Kästners auf der göttingischen Sternwarte von mir angestellt worden sind, um die Geschwindigkeit des Schalles zu finden. Ich maaß trigonometrisch die Weite von dem Standpunkt auf der Stern-

w-

warte, wo ich die Beobachtungen mit der Tertienuhr anstellte, bis an einen zweyten Standpunkt auf einer Wiese ausserhalb der Stadt, wo ein Geschütz zu verschiedenen malen abgefeuert wurde, und fand sie = 3569 kalendergischen Schuhen. Der Schall brauchte, um diese Weite zu durchlaufen,

nach der 1sten	Beobachtung			3 Sec.		8 Tert.	
2ten	:	:	:	3	:	5	:
3ten	:	:	:	3	:	7	:
4ten	:	:	:	3	:	5	:
5ten	:	:	:	3	:	5	:
6ten	:	:	:	3	:	9	:
Mittel				3	:	6,5	

also 3,1 Sec. Hieraus findet sich für die Weite, die der Schall in 1 Sec. zurücklegte

$$\frac{3569}{3,1} = 1151 \text{ Kal. Fuß} = 1036 \text{ pariser.}$$

Eine andere Reihe von Beobachtungen, wo die gemessene Weite 1638 pariser Fuß war, gab 1038 paris. Schuh, welches bis auf eine Kleinigkeit, mit den Beobachtungen der pariser Academisten, und mit denen, welche in der Folge der Ingenieurmajor Müller in Göttingen mit eben dieser Tertienuhr über die Geschwindigkeit des Schalles angestellt hatte, (Gött. gel. Anz. 1791) übereinstimmt, zu einem Beweise, wie genau sich also auch, bey gehörigen Vorsichten, Weiten durch Hülfe des Schalles bestimmen lassen.

Man

Man sehe übrigens noch mehreres hievon in Lamberts Beyträgen zur Mathematik, I. Theil §. 244 u. s. w.

Auch befindet sich in den Abhandl. der Königl. Schwed. Acad. der Wissenschaften im III. Band p. 82 der Kästnerischen Uebersetz. ein Aufsatz von Melderkreuz, Weiten vermittelst des Schalles, zu bestimmen, und mit einander zu vergleichen, besonders wenn man nach den Oertern, wo der Schall herkömmt, keine freye Aussicht hat; Melderkreuz schlägt vor, man solle sich, um die Zeit in viel kleinern Theilen, als Secunden, zu erhalten, gehörig gefüllter Stundengläser von Quecksilber bedienen, und die Vorrichtung so machen, daß man etwa in dem Augenblicke, da man z. E. das Feuer eines Geschützes sieht, einen Hahn öffnen, das Quecksilber auslaufen lassen, und sobald man den Schall hört, den Hahn wieder verschliessen kann, und solle hierauf aus der Menge oder dem Gewichte des ausgelaufenen Quecksilbers die verflossene Zeit berechnen. Dieser Vorschlag würde aber vielleicht in der Ausübung verschiedenen Schwierigkeiten unterworfen seyn.

Auch von Messung der Weiten, vermittelst der Stückschüsse, steht in dem I. Th. 63 Seite der schwed. Abhandl. eine Vorlesung vom Kapit. Triewald.

warte, wo ich die Beobachtungen mit der Tertienuhr anstellte, bis an einen zweyten Standpunkt auf einer Wiese ausserhalb der Stadt, wo ein Geschütz zu verschiedenen malen abgefeuert wurde, und fand sie = 3569 kalendergischen Schuhen. Der Schall brauchte, um diese Weite zu durchlaufen,

nach der 1sten Beobachtung	3	Sec.	8	Tert.
2ten = = =	3	=	5	=
3ten = = =	3	=	7	=
4ten = = =	3	=	5	=
5ten = = =	3	=	5	=
6ten = = =	3	=	9	=
Mittel	3	=	6,5	

also 3,1 Sec. Hieraus findet sich für die Weite, die der Schall in 1 Sec. zurücklegte $\frac{3569}{3,1}$ = 1151 Kal. Fuß = 1036 pariser.

Eine andere Reihe von Beobachtungen, wo die gemessene Weite 1638 pariser Fuß war, gab 1038 paris. Schuh, welches bis auf eine Kleinigkeit, mit den Beobachtungen der pariser Academisten, und mit denen, welche in der Folge der Ingenieurmajor Müller in Göttingen mit eben dieser Tertienuhr über die Geschwindigkeit des Schalles angestellt hatte, (Gött. gel. Anz. 1791) übereinstimmt, zu einem Beweise, wie genau sich also auch, bey gehörigen Vorsichten, Weiten durch Hülfe des Schalles stimmen lassen.

Man

Man sehe übrigens noch mehreres hievon in Lamberts Beyträgen zur Mathematik, I. Theil §. 244 u. s. w.

Auch befindet sich in den Abhandl. der Königl. Schwed. Acad. der Wissenschaften im III. Band p. 82 der Kästnerischen Uebersetz. ein Aufsatz von Melderkreuz, Weiten vermittelst des Schalles, zu bestimmen, und mit einander zu vergleichen, besonders wenn man nach den Oertern, wo der Schall herkömmt, keine freye Aussicht hat; Melderkreuz schlägt vor, man solle sich, um die Zeit in viel kleinern Theilen, als Secunden, zu erhalten, gehörig gefüllter Stundengläser von Quecksilber bedienen, und die Vorrichtung so machen, daß man etwa in dem Augenblicke, da man z. E. das Feuer eines Geschützes sieht, einen Hahn öffnen, das Quecksilber auslaufen lassen, und sobald man den Schall hört, den Hahn wieder verschliessen kann, und solle hierauf aus der Menge oder dem Gewichte des ausgelaufenen Quecksilbers die verflossene Zeit berechnen. Dieser Vorschlag würde aber vielleicht in der Ausübung verschiedenen Schwierigkeiten unterworfen seyn.

Auch von Messung der Weiten, vermittelst der Stückschüsse, steht in dem I. Th. 63 Seite der schwed. Abhandl. eine Vorlesung vom Kapit. Triewald.

II) Das Augenmaaß ist in der practischen Geometrie, um Weiten ohngefähr zu bestimmen, ebenfalls von großem Vortheil. Wir werden in der Folge zeigen, daß zu einer guten und genauen Messung, sehr viel auf die Wahl der Standlinien und anderer festen Punkte ankomme. Diese Auswahl wird aber sehr erleichtert, wenn man von den einzeln Theilen, den Seiten und Winkeln einer Figur auf dem Felde, nur erst eine ohngefähre Bestimmung hat, und ehe man die Messung selbst anstellt, vorher einen rohen Entwurf von der ganzen Gegend nur blos nach dem Augenmaaße macht. Dann wird sich in vielen Fällen entscheiden lassen, wo sich die Messung am bequemsten anfangen läßt, welche Data sich am sichersten bestimmen lassen, und wie solche ausgewählet werden müssen, damit in Absicht der daraus herzuleitenden unbekannten Theile die wenigsten Fehler zu besorgen sind u. s. w. Daher ist ein gutes Augenmaaß sehr brauchbar in der Feldmeßkunst. Ich werde hier kürzlich den Theil der Theorie des Augenmaaßes etwas näher betrachten, welcher sich blos mit Schätzung der Weiten zweyer oder mehrerer Gegenstände von einander beschäftigt, und kurz die Umstände erläutern, die bey diesem Geschäfte in Erwägung gezogen werden müssen, wenn das Augenmaaß etwas von der Wahrheit nicht sehr entferntes geben soll.

Vom Augenmaaße.

§. 52. 1. Wenn wir die Erfahrung zu Rathe ziehen, so ergeben sich leicht einige Mittel, durch deren Hülfe wir einen Begriff von dem ohngefähren Abstande eines Objets von unserm Auge, erlangen; jedermann weiß, daß entfernte Gegenstände bey weitem nicht so kenntlich und deutlich erscheinen, als nahe; Sie kommen unserm Auge nicht nur immer kleiner vor, je weiter wir uns entfernen, sondern sie zeigen sich auch in einer weit blässeren und minder lebhaften Farbe.

2. Mit diesem verschiedenen Eindrucke, den nahe oder entlegene Gegenstände auf unser Auge machen, haben wir uns von Jugend auf gewöhnt, den Begriff von Entfernung oder Abstand zu verbinden, d. h. wir haben uns ein Augenmaaß, ein Vermögen erworben, blos nach diesem Eindrucke Entfernungen zu vergleichen oder zu schätzen, und das mit desto grösserer Genauigkeit, je öfter wir Gelegenheit gehabt haben, Sachen in einer wirklich ausgemessenen, oder auch nur in Zeit oder Schritten angegebenen Entfernung zu sehen, oder aus Vergleichung des Gesichts mit dem Gefühl, und durch andere Mittel, aus dem, was uns das Auge darstellt, Urtheile über die wahren Grössen und Lagen der Gegenstände zu fällen.

3. Indessen wird unser Urtheil über die Größe und Entfernung einer Sache unterweilen getäuscht. Das geschieht, wenn wir z. E.

Nach den Objecten, deren Größe und Abstand, sowohl unter sich, als vom Auge, wir aus Vergleichung ihrer scheinbaren Helligkeit, Farbe und Deutlichkeit, schätzen wollen, keine ganz freye Aussicht haben.

Wen lehrt nicht die Erfahrung, daß ein Thurm oder Berg, wenn er über ein näheres Gebäude hervorragt, uns viel näher und größer vorkömmt, als wenn wir nach ihm hin auf dem Horizonte eine ganz freye Aussicht haben. So sind wir denn überhaupt auch gewohnt, die Entfernung eines Gegenstandes von uns, für desto größer zu halten, je mehr der Zwischenraum, von dem Auge bis an den Gegenstand, in kleinere sich von einander unterscheidende Theile zerfällt. Daher erscheinen Entfernungen auf ebenen Flächen größer, als auf unebenen, wo uns Hügel einen Theil der dazwischen liegenden Gegenstände bedecken. Von einem ähnlichen Umstande hängt denn auch die Täuschung ab, daß das scheinbare Gewölbe des Himmels, gegen den Horizont hin, weit entfernter, als gegen den Scheitelpunkt erscheint, und die Scheibe des aufgehenden vollen Mondes für größer gehal-

halten wird, als wenn er bereits hoch über dem Horizonte herauf ist, und daß überhaupt Gegenstände in der höhern Luft viel näher scheinen, als gleich entfernte auf dem Horizonte, z. E. Wolken oder die Gipfel der Alpen viel näher, als sie wirklich sind. Täuschungen dieser Art hängen indessen auch mit von dem Orte des Bildes dieser Gegenstände in der Luft, wie Lambert (Beyträge zur pract. Geom. §. 27 u. f.) gezeigt hat, ab, wovon aber die Theorie noch lange nicht ins Reine gebracht ist. Von andern Umständen, welche auf unser Urtheil über Größe und Entfernung Einfluß haben lese man mehreres in Smiths Lehrbegr. der Optik, I. Buch §. 160. und an andern Stellen. Priestleys Geschichte der Optik nach Hrn. Prof. Klügels Uebers. S. 500 ꝛc. und Gehlers physik. Wörterbuch unter dem Artik. Entfernung, scheinbare Größe u. dgl. wo alles hieher gehörige sehr schön erläutert ist.

4. Ohnstreitig kömmt aber die Schätzung des Abstandes entlegener Objecte von einander auch sehr mit auf eine vortheilhafte Lage des Auges an.

Am unsichersten ist der Gebrauch des Augenmaaßes, wenn das Auge gegen die Linie, deren Länge es schätzen will, eine sehr schiefe

Lage hat; Um das hieher gehörige zu erläutern, dient folgendes: Es seyen Tab. II. Fig. XIX, a, c, d, e, f, nach Gefallen Gegenstände auf dem Horizonte, und b das Auge.

Man ziehe von a, c, d, e, f nach b gerade Linien, so sieht das Auge b, die Weite ac unter dem Winkel abc, die Weite cd unter dem Winkel cbd u. s. w. Diese Winkel abc, cbd u. s. w. heisen die optischen, sehr oft auch die scheinbaren Weiten der Objecte a, c; c, d; Es lehrt nämlich die Erfahrung, daß uns (einige Täuschungen, wie (3) beyseitegesetzt) Weiten gleich groß zu seyn scheinen, wenn sie an unserem Auge einerley Winkel machen, und daß überhaupt eine Sache desto größer scheint, unter einem je größern Winkel sie ins Auge fällt.

Wären also z. E. die Winkel abc, cbd, dbe, ebf alle gleich groß, so werden dem Auge b, gewöhnlich auch die Weiten ac, cd, de, ef, insgesammt von gleicher Größe zu seyn scheinen.

Man würde aber sehr irren, wenn man die wahren Weiten ac, cd, de, ef in der That einander gleichsetzen wollte. Denn aus der Geometrie wird man leicht übersehen, daß hier cd weit größer, als ac seyn müsse, obgleich cbd = abc ist; Eben so de > cd und ef noch > als de.

Wären also z. E. a, c ein paar Objecte auf dem Horizonte, deren Weite ac man wüßte; e, f, ein paar andere Gegenstände mit a, c, in einer geraden Linie, und mit der bekannten Weite ac wollte man die Entfernung ef nach dem Augenmaaße vergleichen, so würde man einen großen Fehler begehen, wenn man in Gedanken die Weite ac auf ef so oft hintragen wollte, als es angienge, und daher in der That ef so vielmal größer als ac schätzen wollte, so vielmal sie nach dem optischen Winkel größer schiene. Dieser Fehler würde desto beträchtlicher seyn, je schiefer die Linie ef gegen das Auge liegt, d. i. je spitziger die Winkel bea, bfe, und je ungleicher der Objecte e, f, Entfernungen vom Auge eb, fb, sind, auch je mehr die Weiten eb, fb, von denen ba, be, unterschieden sind.

5. Wenn Fig. XX. der Objecte e, f, Entfernungen vom Auge, fb, eb, einander gleich sind, folglich ebf ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, wenn eben so auch der Objecte a, c, Weiten vom Auge ba, bc, gleiche Größe haben, und man die optische Weite, oder den Winkel ebf $= \alpha$, den abc $= \beta$, und die Entfernungen eb $=$ A, ba $=$ B setzt, so wird in dem Dreyecke ebf die wahre Weite ef $=$ $2A \sin \frac{1}{2}\alpha$; In dem Dreyecke abc aber, ac $=$ $2B \sin \frac{1}{2}\beta$. Mithin

$$ac : ef = B \sin \tfrac{1}{2}\beta : A \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

d. h. die wahren Weiten ac, ef, verhalten sich gegen einander, wie die Producte aus den Entfernungen ba, be, der Objecte vom Auge, in die Sinusse der halben optischen Weiten oder Winkel abc, ebf.

6. Wenn man sich also bey b auf dem Felde befände, und wollte aus dem Verhältniß der optischen Weiten abc, ebf, das Verhältniß der wahren ac : ef finden, so kann dieses nicht geschehen, wenn man nicht zu gleicher Zeit auch weiß, wie der Objecte a, c, e, f, Entfernungen vom Auge ba, be, sich verhalten.

7. Wenn von dem Auge alle vier Objecte a, c, e, f ohngefähr gleichweit weg zu seyn scheinen, und man also in obiger Formel (5) A = B setzt, so wird

$$ac : ef = \sin \tfrac{1}{2}\beta : \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

8. Endlich, wenn die optischen Weiten oder die Winkel abc, ebf, nicht gar zu groß sind, z. E. nur einige Grade betragen, so kann man ohne merklichen Fehler $\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha$; $\sin \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\beta$ setzen; dann wird

$$ac : ef = \tfrac{1}{2}\beta : \tfrac{1}{2}\alpha = \beta : \alpha$$

9. Es erhellet also aus dem bisherigen, unter welchen Umständen man auf dem Felde, aus dem Verhältniß der scheinbaren oder optischen

schen Weiten β, α, verschiedener Gegenstände von einander, sogleich das Verhältniß der wahren ac, εφ finden könne. Nämlich, wenn die Gegenstände gleich weit vom Auge wegliegen, und die scheinbaren Weiten β, α, nicht sehr groß sind.

10. Wären also ε, φ, a, c; gleich weit vom Auge entfernt, so untersuche man nach dem Augenmaaße, wie oft etwa die Weite ac, in der εφ enthalten zu seyn scheint; gesetzt dem Auge schiene εφ etwa = 4. ac zu seyn, so wird in der That auch die wahre Weite εφ = 4. ac seyn, vorausgesetzt, daß die Winkel abc, εbφ nicht sehr groß sind.

11. Das wesentliche, was hiebey das Auge zu thun hat, ist, das scheinbare Verhältniß ac: εφ erträglich genau zu schätzen; dieses kann nicht anders, als durch anhaltende Uebung geschehen. Es wird deswegen vortheilhaft seyn, wenn man vorher auf dem Papiere sich in diesem Geschäfte einige Fertigkeit erwirbt, und nur erstlich kleine Weiten schätzen lernt.

12. Man würde, wenn (Fig. XX) auf dem Papiere die Linie ac vorgegeben wäre, ein Stück von ihr z. E. ab, etwa auf folgende Art nach dem Augenmaaße bestimmen.

Erstlich würde ich in Gedanken die Linie ac halbiren. Fände ich nun, daß b näher bey a

als beym Mittelpunkte läge, so würde ich schließen, daß ab < $\frac{1}{4}$ ac seyn müsse.

Wenn ich mir nun ferner vorstelle, ab würde auf ac so oft getragen, als es angienge, so würde ich hier finden, daß ab mehr als viermal, aber nicht völlig fünfmal auf ac passet, folglich den Schluß machen, daß ab > $\frac{1}{5}$ ac seyn müsse.

Auf diese Art könnte man noch mehr Vergleichungen anstellen, und sich der Gränze des Verhältnisses ab : ac stuffenweise immer mehr nähern; Wollte man mit den Gränzen ab < $\frac{1}{4}$ac ab > $\frac{1}{5}$ ac hier sich begnügen, so könnte man für ab etwa das Mittel zwischen $\frac{1}{4}$ac und $\frac{1}{5}$ac annehmen, mithin setzen ab $= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}ac + \frac{1}{5}ac) = \frac{9}{40}ac$.

13. Die Natur der Sache, und anhaltende Uebung werden hiebey allerley Vortheile an die Hand geben, wodurch man in den Stand gesetzt wird, dergleichen Verhältnisse auf dem Papiere sehr geschwind, und gleichsam beym ersten Anblicke, zu schätzen. Auch kann man jederzeit auf dem Papiere die geschätzten Verhältnisse mit dem Zirkel nachmessen, und dadurch finden, wie viel sich das Augenmaaß betrogen habe.

14. Hat man solchergestalt sich erst auf dem Papiere ein fertiges Augenmaaß erworben, so kann

kann man alsdann auf dem Felde desto sicherer die scheinbaren Entfernungen mit einander vergleichen.

15. Je grösser auf dem Felde die scheinbaren Weiten sind, desto unsicherer ist die Schätzung derselben, auch wegen allerley Täuschungen, die dabey vorfallen können.

Es wird nämlich beym Augenmaaße zum vorausgesetzt, daß das Auge, eine Weite, die es schätzen, und mit einer andern vergleichen will, ganz übersehen kann. Wären daher die Objecte e, f (Fig. XX.) ziemlich weit von einander entfernt, so hat das Auge Mühe, sie beyde zu gleicher Zeit deutlich zu unterscheiden, und sich folglich die ganze Weite ef, gehörig vorzustellen. Sieht das Auge genau nach f hin, so hat es eine undeutliche Empfindung von e, und wenn es e genau betrachtet, so erscheint ihm f undeutlich. Weil also auf diese Art die ganze Weite ef undeutlich empfunden wird, so wird auch die Vergleichung einer andern Weite ac, mit ihr, sehr unsicher ausfallen.

Eben dieses ist die Ursache, warum man ein paar kleine Linien weit geschwinder und sicherer schätzen kann, als ein paar größere;

Ferner ist die Schätzung desto sicherer, durch je kleinere Zahlen, ein Verhältniß ausgedrückt werden kann. Unser Auge kann z. B.

weit

weit geschwinder und zuverlässiger, die Verhältnisse, 1 : 2; 1 : 3, 2 : 3 u. s. w. empfinden, als z. E. folgende: 1 : 16; 2 : 27 u. s. w. dieses giebt einige Anleitung, die Zuverlässigkeit eines geschätzten Verhältnisses zu beurtheilen.

16. Die bisherigen Betrachtungen werden nun einigermaaßen zeigen, in wie ferne, und unter welchen Umständen, man sich auf das Augenmaaß verlassen könne; ich habe aus dieser Ursache im vorhergehenden die optischen Sätze (5 — 9) beygebracht, die zu gleicher Zeit in der Folge von anderer Brauchbarkeit seyn werden.

17. Das bisherige betraf bloß den Gebrauch des Augenmaaßes bey Schätzung der Weiten. Man kann es aber auch gebrauchen, die ohngefähre Größe eines vorgegebenen Winkels zu bestimmen, wenn man sich vorher auf dem Papiere darin geübt hat. Es kömmt hiebey vieles auf eine vortheilhafte Lage des Auges gegen die Ebene des Winkels an.

18. In den meisten Fällen, pflegt man die Weite eines Gegenstandes von unserm Auge bloß nach dem Eindrucke zu beurtheilen, die des entfernten Objects, mehr oder minder lebhafte Farbe, dessen Deutlichkeit und Klarheit u. s. w. auf unser Auge macht: und nach Verhältniß dieses Eindrucks, werden die Weiten verschiedener Gegenstände von unserm Au-

ge,

ge, mit einander verglichen. Man kann sich in diesem Geschäfte offenbar durch anhaltende Uebung eine Fertigkeit verschaffen. Man nehme anfangs nur kleine Weiten vor, schätze sie nach der Empfindung, die unser Auge von ihnen hat; man vergleiche die geschätzte Weite mit der wahren, die man etwa durch Schritte finden, oder auf eine andere Art bestimmen kann, so findet man, wie viel sich das Augenmaaß betrogen: hierauf übe man das Auge immer in größern Entfernungen, so wird man endlich eine ziemliche Fertigkeit erlangen, kleine Weiten sogleich beym ersten Anblick, ohne großen Irrthum, größere aber wenigstens erträglich zu schätzen. Insbesondere wird bey der Uebung des Augenmaaßes in größern Entfernungen, eine Karte dienen, die man von der umliegenden Gegend hat, wo man diese Uebung anstellet. Man schätze die Entfernung eines Orts von dem Standpunkte, wo man sich befindet, und den man auch auf der Karte hat, messe alsdann auf der Karte die wahre Weite, und vergleiche sie mit der geschätzten, so findet man den Fehler des Augenmaaßes: dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man die Fertigkeit erlangt hat, in Schätzung einer vorgegebenen Weite der Wahrheit ziemlich nahe zu kommen.

Verschiedene neue und brauchbare Bemerkungen über das Augenmaaß findet man noch

in

in einem Aufsatze des Hrn. Prof. Jetze im Leipziger Magazin zur Naturkunde und Mathematik 1783. I. Stück.

Anmerkung.

Die Kettenlinie.

§. 53. Ehe ich dieses Kapitel schließe, muß ich auch noch kürzlich der Kettenlinie erwähnen.

Wenn a. b. Fig. XXI. auf dem Felde ein paar Punkte sind, zwischen denen sich eine Vertiefung, z. E. ein Fluß oder Graben befände, über den man von a nach b die Kette ausspannen und messen wollte, so wird sich die Kette, aller angewandten Kraft ohngeachtet, nie völlig in eine gerade Richtung ab ausspannen lassen, sondern sich allemal, gegen die Mitte zu, etwas senken, so daß die Glieder derselben, wie bc, cd, de, u. s. w. insgesammt gegen den Horizont eine gewisse Neigung bekommen.

Diese Senkung der Meßkette, oder die Tiefe ihres untersten Punktes f, unter der Horizontallinie ab, ist desto merklicher, je mehr Glieder zwischen a und b ausgespannt sind.

Die Ursache, warum sich die Kette gegen ihre Mitte zu senkt, liegt offenbar in den gegen=

genseitigen Wirkungen der Schwere, mit welcher jedes Glied in einer Verticallinie herabsinken will; die zwischen a und b herabhängenden Glieder erhalten aber nicht eher ihre gehörige Stellung als bis ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Schwere, seine größte Tiefe unter der Horizontallinie erreicht hat. Eben das gesagte gilt auch von einer Schnur, die man zwischen a und b ausspannen wollte, nur mit dem Unterschiede, daß sich die Schnur in eine wirkliche zusammenhängende krumme Linie beugt, bey der Kette hingegen, die Stellung ihrer einzeln Glieder bc, cd, de u. s. w. mehr den Umfang eines gewissen Vielecks ausmacht.

Ueber die Krümmung einer Schnur haben verschiedene Mathematiker Untersuchungen angestellt. Allgemeine Auflösungen davon findet man z. B. in Ioh. Bernoulli Opp. T. IV. n. 173.

Es erhellet leicht, daß man einigen Fehler begehen würde, wenn man, um die Horizontalweite ab zu wissen, die Menge der zwischen a und b herabhängenden Kettenglieder oder Fuße, dafür annehmen wollte.

Denn die Summe bc + cd + de u. s. w. beträgt allemal etwas mehr, als die ganze Horizontalweite ab, welche die kürzeste Entfernung der beyden Punkte a und b ist.

Da

Da aber in den meisten Fällen, wenn nämlich, wie ich voraussetze, die Kette stark ausgespannt wird, die größte Tiefe hf nur klein ist, in Vergleichung der ganzen Weite ab, so wird auch der Fehler so gar beträchtlich nicht seyn.

Indessen könnte man doch hier, um völlig überzeugt zu seyn, einige Anweisung verlangen, um wie viel man, bey einer gegebenen größten Tiefe hf, wohl fehlen würde, wenn man für ab, die Länge der zwischen a und b ausgespannten Kette annähme.

Dieses zu bestimmen, setzt Kenntnisse der höhern Mathematik und Mechanik zum voraus, die ich hier nicht vortragen kann, die auch die wenigsten meiner Leser verstehen würden. Auch kömmt es hier auf eine sehr genaue Bestimmung nicht an.

Hier ist indessen eine Formel, wie ich sie nach der Theorie gefunden habe, um ohngefähr den Fehler zu bestimmen, den man begehet, wenn für ab, die Länge der herabhängenden Kette bdfha genommen wird.

Ich nehme an, daß die beyden Punkte a und b in einer Horizontallinie liegen, die Glieder der Kette durchgehends gleich lang und schwer sind, und folglich der unterste Punkt

f in die Mitte zwischen a und b falle. Setzt man nun die größte Tiefe hf = a, die Länge eines Gliedes an der Kette = e, und die Anzahl der zwischen b und f herabhängenden Glieder = n, so ist der Unterschied zwischen der halben Länge der Kette, und dem halben Horizontalabstande oder $bc + cd + de \ldots + ef - bh$ beynahe $= \frac{(2n+1)(2n-1)a^2}{6.n^3e}$. Mithin der Unterschied der ganzen Horizontalweite ab, und der zwischen a und b herabhängenden Kettenlänge $= \frac{(2n+1)(2n-1)a^2}{3n^3e}$, vorausgesetzt, daß die größte Tiefe hf = a, nicht sehr groß in Vergleichung der ganzen zwischen a und b herabhängenden Länge ist, welches auch meistens bey geodätischem Gebrauche, statt finden wird.

Den Gebrauch dieser Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die halbe Länge der zwischen a und b ausgespannten Kette oder $n.e = 25'$; oder $n = 25$, $e = 1' = 1000''''$. die größte Tiefe $a = 1' = 1000''''$ so wird $\frac{(2n+1).(2n-1)}{3.n^3.e}.a^2 = \frac{51.49.1000^2}{3.25^3 1000}$ Scr. $= \frac{17.49}{25^3}.1000$ Scr. dieses kann man durch Logarithmen berechnen.

$$\log 17 = 1{,}2304489$$
$$\log 49 = 1{,}6901961$$
$$\log 1000 = 3{,}0000000$$

Logarith. des Zählers = 5,9206450
Log. d. Nenn. = 3. log 25 = 4,1938200

$\log. \frac{17 \cdot 49 \cdot 1000}{25^3} = 1{,}7268250$ dieser Logarithme, unter der Characteristik 3 aufgesucht, giebt die zugehörige Zahl $\frac{17 \cdot 49 \cdot 1000''''}{25^3}$ $= 53'''' \, 31$ od. $5''' \, 3''''$, 31 od. 0,05331 Fuß. Es ist also die Horizontalweite a b Fig. XXI, in dem angenommenen Exempel nur um 0,05331 Fuß, oder nicht einmal völlig 0,06 Fuß kleiner, als die Länge der zwischen a und b herabhängenden Kette, welche $= 2 \cdot 25' = 50'$ ist. Daher ist also der Fehler, um den man ab zu groß angäbe, wenn man sie $= 50'$ setzte, fast für nichts anzusehen, wenn gleich die Senkung der Kette einen ganzen Fuß betrüge, und also sehr merklich in die Augen fiele.

Man kann auch, ohne die obige Formel anzunehmen, noch auf eine andere Art, wenigstens die Gränze des größten Fehlers bestimmen, der sich aus der Krümmung oder Senkung der Kette befürchten ließe.

Man verlängere die beyden äussersten Glieder b c, a i, bis sie sich bey r durchschneiden, so erhält man unter den Umständen, die ich en angenommen habe, ein gleichschenklichtes Drey-

Dreyeck a r b, wo h f verlängert, durch r gehen wird.

Nun ist die Summe der beyden Seiten ar + rb gewiß allemal größer, als die ganze Länge der zwischen a und b herabhängenden Kette, folglich auch der Unterschied zwischen dem Horizontalabstande ab und der beyden Linien ar + rb Summe, größer, als der zwischen dem Horizontalabstande ab, und der Ketten-Länge: d. h. wenn zwischen a u. b, m Kettenglieder, jedes = e herabhängen, u. der Horizontalabstand a b = h gesetzt wird, so ist allemal $ar + rb - h > m.e - h$. Ist also der Unterschied $ar + rb - h$ unbeträchtlich, so wird um so viel mehr auch $m.e - h$ unbeträchtlich seyn.

Da ich nun hier zum voraus setze, daß die Kette stark angespannt ist, folglich die äussersten Glieder bc, ai, mit der Horizontallinie ab sehr kleine Winkel machen, so wird nicht allein hf, sondern auch hr in Vergleichung des Horizontalabstandes ab, klein seyn. Dieser Voraussetzung gemäß, berechne ich den Unterschied $ar + rb - h$ auf folgende Art.

In dem gleichschenklichten Dreyecke arb setze man die Tiefe $hr = c$; so ist $ah = \frac{1}{2}h$, und

$$ar = \sqrt{(\tfrac{1}{4}h^2 + c^2)} = \tfrac{1}{2}h\sqrt{\left(1 + \frac{4c^2}{h^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}h\left(1 + \frac{2c^2}{h^2}\right)$$ weil nähmlich c in Vergleichung mit h klein ist. (Tr. S. VIII.) Ferner

auch $= rb = ar = \frac{1}{2}h\left(1 + \frac{2c^2}{h^2}\right)$: Daher $ar + br$ $= h\left(1 + \frac{2c^2}{h^2}\right) = h + \frac{2c^2}{h}$ und $ar + rb - h$ $= \frac{2c^2}{h}$.

Da nun $\frac{2c^2}{h}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so ist auch der Unterschied $ar + rb - h$ sehr unbeträchtlich, folglich noch mehr der Unterschied $m.e - h$, zwischen der Kette und dem Horizontalabstande.

Es sey z. E. die Tiefe $hr = c = 1'$ und die Horizontalweite $ab = h = 50'$, so wird

$$ar + rb - h = \frac{2c^2}{h} = \frac{2'}{50} = \frac{1'}{25} = 0{,}04$$

Fuß = 4 Lin.

Um so viel wäre also hier die Horizontalweite ab nur kleiner, als der beyden Linien $ar + rb$ Summe. Es wird folglich der Unterschied zwischen der Kette und dem Horizontalabstande oder $m.e - h$ nicht einmal 4 Linien betragen: und so erhellet, daß man bey einer nicht sehr großen Beugung der Kette, wie hier angenommen ist, ohne merklichen Fehler den Horizontalabstand ab der Länge der zwischen a und b herabhängenden Kette gleich setzen darf, wenn man nicht die größte Schärfe verlangt.

IV.

IV. Kapitel.

Entwerfung krummer Linien auf dem Felde.

Vorläufige Begriffe und Erklärungen.

§. 54. Es sey Fig. XXII. Tab. II. αβcδεφγζ der Zug einer beliebigen krummen Linie auf dem Felde: z. B. die Beugung eines Flusses, die krumme Gränze eines Waldes u. d. gl.

AD sey aber eine gerade Linie, die nach Gefallen neben der krummen hergezogen ist: so wird die krumme Linie, sich der geraden, an einigen Stellen nähern, an andern sich wieder von ihr entfernen, auch sie selbst, wie z. B. bey c durchschneiden können.

2. Wüste man nun die Lage eines jeden Punktes der krummen Linie gegen die gerade, so würde man einen deutlichen Begriff von ihrem Zuge erhalten, ja auch selbst daraus ein Mittel finden, sie auf dem Papiere zu verzeichnen.

3. Es giebt verschiedene Methoden, die Lage eines Punktes, gegen eine nach Gefallen gezogene gerade Linie zu bestimmen; diejenige aber,

die sehr oft in der practischen Geometrie gebraucht wird, ist folgende:

Es sey in der willkührlichen geraden Linie, AD nach Gefallen ein gewisser Punkt A angenommen, und α, β, δ u. s. w. seyen Punkte der krummen Linie, deren Lagen gegen die gerade AD bestimmt werden sollen. Man fälle also von α, β, δ u. s. w. auf AD die Perpendiculärlinien αa, βb, δd u. s. w. herab.

So wird der Punkt α bestimmt seyn, wenn man erstlich die Länge des Perpendikels αa weiß, zweitens die Weite Aa, von dem willkührlichen Punkte A angerechnet, bis an das Perpendikel aα, und drittens die Lage des Perpendikels αa, ob nämlich αa, rechter oder linker Hand AD liegt.

Eben so würde β durch die Linien βb, Ab bestimmt u. s. w.

Denn es wird kein anderer Punkt, in der krummen Linie vorkommen, dem eben die αa, Aa zugehörten, und der doch von dem Punkte α, unterschieden wäre. Es ist kein Punkt in der krummen Linie, als gerade der β, dem dieselben Grössen bβ, Ab zugehörten.

4. Es könnte wohl geschehen, daß z. E. der Punkt δ eben den Abstand von der geraden Linie AD hätte, den der Punkt α hat, oder

daß

daß $d\delta = a\alpha$ wäre, allein dann sind doch Ad, und Aa nicht einerley; Auch läge hier δ linker Hand AD, α aber rechter Hand.

Eben so könnte z. E. dem Punkt x sowohl ein Perpendikel $xa = \alpha a$, als auch dieselbe Weite Aa zugehören, die dem Punkte α zukömmt, aber x wird doch nicht mit α einerley seyn, weil die Weiten xa, $a\alpha$ auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie AD liegen.

5. So erhellet also, wie durch die in (3) angegebenen Umstände, die Lage eines gewissen Punktes gegen die gerade Linie AD völlig bestimmt und gegeben ist.

6. Man nennt die Linien Aa, Ab, Ad u. s. w. welche auf der willkührlichen Ad von A angerechnet werden, Abscissen, und die zugehörigen Perpendikel αa, βb, δd; Ordinaten. Die Linie AD selbst heißt die Abscissenlinie, und A der Anfangspunkt der Abscissen.

7. Also sagt man, daß jeder Punkt der krummen Linie z. E. α durch seine Abscisse Aa, und Ordinate $a\alpha$ gegeben oder bestimmt sey.

8. Da zu gleicher Zeit auch die Lage der Ordinate bekannt seyn muß (3) so kann man diese durch die Zeichen + — unterscheiden. Z. B. die Ordinaten rechter Hand der Abscissen-

linie, wie $a\alpha$, $b\beta$ u. s. w. mögen mit +, die Ordinaten linker Hand z. E. $d\delta$, εe u. s. w. mit dem Zeichen — bemerkt werden.

9. Da, wo die krumme Linie die gerade Linie AD schneidet, wie bey c, ist die Absciſſe = Ac, die Ordinate aber = o.

10. Da zu jedem andern Punkte der krummen Linie eine andere Absciſſe und Ordinate gehört (3. 4.) so würde es auf dem Felde eine unendliche Arbeit seyn, wenn man für alle Punkte die Absciſſen und Ordinaten messen wollte. Man bestimmt daher gewöhnlich nur diejenigen Ordinaten und Absciſſen, welche den merklichsten Krümmungen und Wendungen entsprechen. Z. B. in der Figur nur diejenigen, welche den Punkten α, β, c, i, δ, ε, ϕ, γ, η zugehören, wo die krumme Linie am stärksten sich der Absciſſenlinie nähert, oder sich von ihr entfernt.

11. Hat man solchergestalt auf dem Felde für die hauptsächlichsten Punkte der krummen Linie, die Ordinaten und Absciſſen gemessen, so läßt sich daraus schon ziemlich genau ihr Zug und ihre Gestalt beurtheilen, und auf dem Papiere entwerfen, wenn man die Maaße der Absciſſen und Ordinaten, in eben der Ordnung, wie man sie auf dem Felde gefunden, vermittelst des verjüngten Maaßstabes, auf eine auf

dem

dem Papier gezogene Abscissen = Linie absetzt, und durch die Endpunkte der Ordinaten aus freyer Hand eine krumme Linie zieht. Die Figur auf dem Papiere wird aber der auf dem Felde, desto ähnlicher werden, je mehr Abscissen und Ordinaten gemessen worden sind.

12. Der Bogen einer krummen Linie, der zwischen zwey nächst auf einander folgenden, und nicht sehr weit von einander liegenden Ordinaten enthalten ist, kann gegen die Abscissenlinie hohl oder erhaben seyn. Hohl heißt er, wenn dessen Chorde zwischen ihm und der Abscissenlinie liegt. Erhaben, wenn die Chorde nicht zwischen ihn und die Abscissenlinie fällt. Z. E. in der Figur, wäre der Bogen $\gamma\varphi$ gegen die Abscissenlinie hohl, weil dessen Chorde $\gamma\varphi$ zwischen ihm und der Abscissenlinie liegt. Der Bogen $\gamma\eta$ aber wäre das Beyspiel eines Bogens, der seine erhabene Seite der Abscissenlinie zukehrte.

13. Man hat in der höhern Geometrie noch andere Merkmahle, woraus man erkennen kann, ob ein Bogen seine hohle und erhabene Seite der Abscissenlinie zuwendet. Diese Merkmahle sind aber in der practischen Geometrie von keinem Nutzen. Man sehe indessen hievon Kästners Anal. des Unendl. (1770) §. 518. 521.

14. Hat man auf dem Felde ein paar nächst auf einander folgende Ordinaten gemessen, so wird es gut seyn, wenn man zu gleicher Zeit auch anmerkt, ob der Theil der krummen Linie zwischen ihnen, gegen die Abscissenlinie hohl oder erhaben ist. Diese Bemerkung dient alsdann, zu einer genauern Verzeichnung auf dem Papiere.

15. Einige Schriftsteller bedienen sich statt der Wörter, Abscissen, Ordinaten, Benennungen aus der mathematischen Geographie, und nennen die Abscissen, Längen, die Ordinaten, Breiten; ich habe aber lieber die Namen beybehalten wollen, die man einmal in der Geometrie eingeführt hat.

Aufgabe.

§. 55. Die Abmessungen an einer krummen Linie auf dem Felde zu bestimmen.

Aufl. 1. Man stecke längst der krummen Linie (Fig. XXII.), eine gerade ab, durch ein paar Stäbe, die man bey A und D in den Boden befestigt.

2. In der abgesteckten Richtung AD, spanne man von A bis B eine Meßkette aus, und lasse sie in unverrückter Lage.

3.

3. Hierauf gehe man längst der ausgespannten Kette fort, z. B. nach a, wo man bey α eine merkliche Bucht oder Wendung der krummen Linie bemerkt.

4. Man zähle auf der Kette die Menge der von A bis a enthaltenen Ruthen, Fuße und Zolle, so hat man die Abscisse Aa, die dem Punkte α zugehört.

5. Um die Ordinate aα zu messen, lege man an den Punkt a, so gut es nach dem Augenmaaße geschehen kann, einen Maaßstab senkrecht an die Richtung der Kette, und messe nach dem Punkte α zu.

6. Wollte man noch genauer verfahren, so spanne man von α nach a eine Schnur an, und messe mit dem Maaßstabe längst ihr her. Die ausgespannte Schnur dient nicht allein, um in der geraden Richtung aα zu messen, sondern auch desto sicherer bey a einen rechten Winkel Aaα zu erhalten.

7. In den meisten Fällen aber kann man die Schnur weglassen; besonders wenn die Ordinaten nicht sehr groß sind.

8. Die gemessene Abscisse Aa, und Ordinate aα, bemerke man in einem bey sich zu führenden Manual, oder Brouillon.

9. Hierauf gehe man weiter längst der Kette fort, und wenn man nach dem Punkte b hinkömmt, wo man abermahls bey β eine Wendung der krummen Linie, nach einer auf Ab senkrechten Richtung bβ bemerkt, so zähle man wiederum wie vorhin, die Menge der Ruthen, Fuße und Zolle von A bis b, und messe die Ordinate bβ.

10. Weil die bisherigen Ordinaten rechter Hand der Abscissenlinie lagen, so schreibe man neben ihre Maaße in dem Manuale, zugleich das Zeichen + hin. (§. 54. 8.)

11. Bey c, wo die krumme Linie in die Abscissenlinie einschneidet, nimmt man auch die Abscisse Ac; und setzt die zugehörige Ordinate = o. (§. 54. 9.)

12. Endlich bey B, wo die Kettenlänge zu Ende ist, messe man auch die Ordinate Bi. Die Abscisse AB ist aber da der ganzen Kettenlänge gleich.

13. Auch muß man in dem Manuale neben die Ordinate Bi das Zeichen — setzen, weil sich die krumme Linie bereits linker Hand der Abscissenlinie befindet.

14. Ist man solchergestalt mit einer Kettenlänge zu Ende, so gehen die Kettenzieher weiter

ter fort, und spannen abermahls von B bis C eine Kettenlänge an.

15. Darauf verfährt man von B bis C eben so, wie vorhin von A bis B gezeigt worden.

16. Hier muß ich aber erinnern, daß beym 2ten Kettenzuge zu jeder Abscisse Bd, Be, Bf u. s. w. eine Kettenlänge, oder 5° addirt werden muß, um die Abscissen Ad, Ae, Af, von dem Punkt A angerechnet, zu erhalten; und diese letztern schreibt man eigentlich in dem Manuale auf.

17. Eben so addirt man, beym dritten Kettenzuge, zu jeder Abscisse Ch u. s. w. 2 Kettenlängen oder 10°, damit man die Abscissen Ah u. s. w. bekomme.

18. Bey jedem Kettenzuge nehme man überhaupt so viel Abscissen und Ordinaten, als man nothwendig braucht, um daraus ohngefähr den Zug der krummen Linie beurtheilen zu können.

19. Wegen des Manuals muß ich aber noch folgende Erinnerung beyfügen. Man mache zwey Kolumnen, in die erste schreibe man die Maaße für die Abscissen, in die zweyte die Maaße der Ordinaten mit den zugehörigen Zeichen + —.

Auch kann man, um die einzelnen Kettenzüge zu unterscheiden, allemal da, wo ein Kettenzug zu Ende ist, einen Strich untersetzen.

Endlich bemerke man noch in dem Manuale, wo jedesmal zwischen zwey nächst auf einander folgenden Ordinaten, die krumme Linie hohl oder erhaben gegen die Abscissenlinie war, und bediene sich dazu etwa der Buchstaben H. E. oder anderer willkührlicher Zeichen, die man neben die Maaße der Ordinaten hinschreibt.

20. So würden also die Bestimmungen für die Abscissen und Ordinaten der krummen Linie, in dem Manuale etwa auf folgende Art zu stehen kommen.

Abscissen	Ordinaten	
0 ′ ″	0 ′ ″	
1 . 5 . 3	+ 0 . 2 . 8	
2 . 8 . 5	+ 0 . 8 . 3	H.
3 . 4 . 6	+ 0 . 0 . 0	H.
5 . 0 . 0	− 0 . 5 . 0	E
6 . 0 . 0	− 0 . 6 . 0	E
7 . 2 . 0	− 0 . 7 . 0	E
8 . 5 . 0	− 0 . 8 . 0	E
10 . 0 . 0	− 0 . 7 . 0	E
11 . 0 . 0	− 0 . 9 . 0	E
12 . 9 . 0	− 0 . 5 . 0	H
15 . 0 . 0	− 0 . 4 . 0	H.

21.

21. Wie nun aus solchen Datis die krumme Linie aufs Papier verzeichnet werden könne, das werde ich in der Folge zeigen.

Anmerkungen über das Vorhergehende.

§. 56. I) Es erhellet leicht, daß die Punkte α, β, γ u. s. w. eben nicht Punkte einer krummen Linie seyn müssen, sondern sich auch nach Gefallen auf andere Gegenstände beziehen können, deren Lage man in Absicht der Abscissenlinie bestimmen will. Z. E. Eckpunkte von Gebäuden, Gränzsteine u. s. w.

II) Man nimmt die willkührliche Abscissenlinie gern so nahe neben der krummen Linie her, als möglich, damit die Ordinaten nicht gar zu groß werden; fangen daher die Ordinaten an sehr stark zu wachsen, so reicht man mit einer Abscissenlinie allein nicht aus. In solchem Falle nimmt man eine neue Abscissenlinie DO an, deren Lage oder Winkel mit der erstern, bekannt seyn muß. Doch hievon werde ich in der Folge erst nähern Unterricht ertheilen können.

III) Oft zeigen sich unerwartete Hindernisse, die keine unmittelbare Messung der Ordinaten zulassen: Wie wenn z. E. die krumme Linie Fig. XXII die Beugungen eines Flusses vorstellte; Da kann man oft wegen der seichten

Ufer keine Ordinaten bequem messen. Wie man sich in solchem Falle zu verhalten habe, wird ebenfalls die Folge ausweisen.

IV) Es muß endlich noch bemerkt werden, daß man sowohl die Abscissenlinie nach horizontaler Richtung annehmen, als auch selbst die Ordinaten horizontal messen müsse, damit man nämlich die Reduction der krummen Linie auf die Horizontalfläche erhalte. (§. 4.)

Liefe daher die krumme Linie Fig. XXII. an einer Anhöhe herunter, so müste man nach (§. 38. 6.) jeden Kettenzug horizontal anspannen. Um die Ordinaten zu messen, liesse sich in solchem Falle sehr bequem eine Meßschnur gebrauchen. Man läßt sie an dem Punkte, wo sich auf der Kette eine Abscisse endigt, fest halten, und spannt sie alsdann bis an den perpendiculär gegenüberstehenden Punkt der krummen Linie horizontal aus, so daß sie mit der Kette einen rechten Winkel macht: Hierauf bestimmt man auf dieser Schnur die Länge der Ordinate. Dieses Verfahren ist bey solchen Krümmungen, die an Anhöhen herunter laufen, weit sicherer, als wenn man sich der Maaßstäbe dazu bedienen wollte.

Es versteht sich aber, daß auf der Schnur Fuße von eben der Größe seyn müssen, wie

auf

auf der Kette, damit man die Ordinaten und Abscissen in einerley Maaße bekomme.

Uebrigens ist in vielen Fällen eine sehr genaue Bestimmung der Ordinaten nicht nöthig, wie z. E. in dem Falle, wenn die Krümmungen eines Flusses zu bestimmen sind, da bekannt ist, daß die Ufer oft sehr unbestimmte Gränzen haben.

V. Kapitel.

Leichte Methoden, senkrechte und parallele Linien auf dem Felde zu ziehen.

§. 57. Diese Aufgaben sind in der Ausübung von mannichfaltiger Anwendung, z. E. bey Feldertheilungen u. s. w.

Es kommen aber hiebey verschiedene schwere Fälle vor, die sich ohne Theorie des Winkelmessens, und der dazu gehörigen Werkzeuge, nicht gut auflösen lassen. Diese muß ich bis auf die Folge versparen. Im gegenwärtigen Kapitel zeige ich, wie man bloß, vermittelst der Meßketten und Maaßstäbe, auf dem Felde parallele und senkrechte Linien ziehen könne.

Wem übrigens aus der Elementar-Geometrie die Lehrsätze von Parallellinien bekannt sind, der wird die Beweise der folgenden Aufgaben sehr leicht finden können, ohne daß ich nöthig hätte, mich dabey aufzuhalten.

Aufgabe.

§. 58. Perpendiculär-Linien auf dem Felde zu ziehen.

Aufl. I) Gesetzt in Fig. XXIII sey von dem Punkte D auf die gerade Linie EB, eine Perpendiculäre herabzufällen; ich will hiebey annehmen, die Weite des Punktes D von der geraden Linie EB, d. h. die perpendiculäre DC sey merklich kürzer, als die Länge der Meßkette oder Meßschnur, die man gebraucht. Um nun auf EB den Punkt C zu finden, auf den das Perpendikel DC eintreffen muß, so verfahre man auf folgende Art:

Ein paar Punkte der geraden Linie EB, bezeichne man durch ein paar Absteckstäbe, E, B.

Nun setze man in den Punkt D einen Kettenstab, und spanne von D nach f die Meßkette aus: darauf bestimme man auf der ausgespannten Kette Df, den Punkt A welcher mit E und B in gerader Linie liegt, welches geschiehet, wenn man mit einem Absteckstabe längst Df fortgehet, und ihn bey A so einsetzt, daß ein Gehülfe bey E, ihn in der Verticalfläche oder geraden Linie EB erblickt. Hierauf zähle man auf der Kette, die Menge der Ruthen, Fuße und Zolle, von D nach A.

Nachdem der Punkt A durch ein Zeichenstäbchen bemerkt worden, so ergreife man bey A die Meßkette, und bringe das Stück AD, indem man solches um den Endpunkt D, als wenn man auf dem Felde mit dem Halbmesser AD einen Kreis beschreiben wollte, herumführt.

in die Lage DF, so daß A nach F, wiederum in die gerade Linie EB hinkömmt.

So erhält man durch dieses Verfahren auf dem Felde ein gleichschenklichtes Dreyeck ADF, wo AD = DF.

Hierauf messe man die Weite AF. Sie sey z. E. 6°; die Hälfte davon 3° zähle man auf einer in die Richtung AF ausgespannten Kette, von A nach C, und setze in C einen Stab ein, so wird C der Punkt seyn, auf welchen das Perpendikel DC eintrift. Und so würde auch zu gleicher Zeit eine Verticalfläche durch D, C, auf der EB senkrecht stehen.

II) Ist aber der Punkt D von der geraden Linie EB so weit entfernt, daß man mit einer bey D befestigten Kettenlänge nicht bis auf die gerade Linie EB hinreichen, und auf ihr wie in (I) den Punkt A bestimmen kann, verfahre man auf folgende Art:

Man setze bey A und F, willkührlich in die gerade Linie EB, ein paar Stäbe hin, so aber, daß ein Perpendikel DC, nach dem Augenmaaße, zwischen A und F würde zu liegen kommen.

Hierauf messe man die drey Seiten AD, DF, AF, des Dreyecks ADF.

So

So kann man daraus die Weite des Punkts A, von dem Punkte C, wo das Perpendikel DC hinfallen muß, durch eine leichte Rechnung finden. Mit Worten ausgedrückt, ist die Regel diese: Man addire die Quadrate der Seiten AD und AF, die aus dem Punkte A auslaufen, zusammen, davon subtrahire man das Quadrat der dritten Seite DF, und den Rest dividire man durch die doppelte Grundlinie AF, so hat man die Weite AC: oder will man die Weite FC haben, so addire man die Quadrate von FD und FA zusammen, ziehe das Quadrat der dritten Seite AD davon ab, und dividire den Rest wie vorhin.

Also ist $AC = \frac{AD^2 + AF^2 - FD^2}{2\,AF}$ (Tr. §. XXIII)

$FC = \frac{FD^2 + FA^2 - AD^2}{2\,AF}$

Ex. Es sey gemessen worden $AD = 50'$
$DF = 60'$
$FA = 82'$

so wird $AD^2 = 2500$
$AF^2 = 6724$

$AD^2 + AF^2 = 9224$
$FD^2 = 3600$

$AD^2 + AF^2 - FD^2 = 5624$

Mithin
$\frac{AD^2 + AF^2 - FD^2}{2\,AF}$
$= \frac{5624}{164} = \frac{1406}{41}$
$= 34,29$
also $AC = 34'\ 2''\ 9'''$

Man spanne also in die Richtung AF die Meßkette an, und nehme auf ihr von A nach C 34′ 2″ 9‴ so ergiebt sich der Punkt C, folglich die Lage des Perpendikels DC.

Man sieht hieraus, wie bequem sich die vorgelegte Aufgabe durch Rechnung auflösen läßt.

III) Auf das Ende A einer Linie AB Fig. XXIV ein Perpendikel AD aufzurichten, verfährt man so:

Man setze in A und B die beyden Kettenstäbe ein, oder befestige bey A und B die beyden Endpunkte einer Meßschnur.

Nun ergreife man das Mittel der Meßkette oder Schnur, z. E. wenn die Kette 5° lang wäre, so fasse man den Ring der zu 2° 5′ gehört, und gehe nach C, bis die beyden Hälften der Meßkette AC, CB, gehörig angespannet sind, und folglich AC = CB ist. Bey C, wo das Mittel der Kette hintrifft, setze man einen Stab hin, und wenn dieß geschehen, gehe man nach A, ziehe die daselbst stehende Kettenstange aus, und bringe den Theil AC der Meßkette, in die Lage CD, so daß der Kettenstab A nach D, in gerader Linie mit C und B, hinkömmt. Dann wird D der Punkt seyn, der perpendiculär über A steht.

Denn

Denn weil man AC = CB = CD gemacht hat, so geht durch die drey Punkte D, A, B ein Kreis, dessen Durchmesser = BD ist, und da ist dann der Winkel DAB im Halbkreise, bekanntermaaßen ein rechter.

IV) Wollte man Fig. XXIII überhaupt durch jeden willkührlichen Punkt C, der in der geraden Linie EB vorgegeben wäre, ein Perpendikel aufrichten, so nehme man auf beyden Seiten des Punktes C, auf der geraden Linie, EB, ein paar gleich große Stücke, z. E. CF = CA, und mache jedes etwa eine Ruthe lang. Dann setze man in A und F die Kettenstäbe ein, ergreife das Mittel der Kette, und bringe ihre beyden Hälften in die Lagen AD, FD, so daß AD = DF, und beyde Linien gehörig angespannt sind, so wird der Punkt D, wo auf den Boden das Mittel der Kette hintrifft, die Lage des Perpendikels DC bestimmen.

Es versteht sich, daß die Weite AF merklich kleiner als die Länge der Kette genommen werden müsse.

V) In jedem rechtwinklichten Triangel ist das Quadrat der Hypothenuse den beyden übrigen Quadraten zusammen genommen gleich. Wären also die beyden Catheten AC, CG, Fig. XIV ersterer AC = 3, und der andere CG = 4, so würde die Hypothenuse AG =

weil $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist. Daher ist ein Dreyeck rechtwinklicht, wenn sich seine drey Seiten verhalten wie die drey Zahlen, 3, 4, 5. Dieses giebt ein bequemes Mittel, rechte Winkel, oder Perpendikulärlinien auf dem Felde zu bestimmen.

Man trage Fig. XIV von C nach G, 4 Ruthen. Hierauf nehme man auf einer Meßschnur eine Länge von 8 Ruthen, lasse beyde Enden dieser Länge bey C und G festhalten; und ergreife diese Schnurlänge von 8 Ruthen dergestalt, daß wenn man sie nach den Richtungen CA, GA anspannt, CA = 3 Ruthen, GA = 5 R. werde, so erhält man einen rechten Winkel ACG, und ein Stab bey A hingesetzt, giebt die Richtung des Perpendikels CA, welche man alsdann nach Gefallen verlängern kann.

VI) Dieses sind die brauchbarsten Methoden, Perpendikulärlinien auf dem Felde, bloß mit der Kette und Schnur, abzustecken. Man kann in jedem Falle diejenige wählen, die zu einer gewissen Absicht die bequemste ist.

Aufgabe.

§. 59. Parallel-Linien auf dem Felde zu ziehen.

Aufl.

Aufl. I) Da wir in der vorigen Aufgabe gezeigt haben, Perpendikulärlinien zu ziehen, so ergiebt sich daraus von selbst die Methode, zwey oder mehrere Linien auf dem Felde einander parallel zu machen. Ein Exempel wird dieses erläutern.

Es sey (Fig. XXV) AB eine gerade Linie, mit der man eine parallele ziehen soll, die um 18 Fuß von ihr abstehe.

Man errichte also durch einen willkührlichen Punkt d in AB, eine Perpendikulärlinie da auf AB, und mache solche = 18′; Eben so geschehe dieses durch einen andern Punkt e, und mache auch eb = 18′ so geben ein paar Stäbe, bey a und b hingesetzt, die Richtung ab, die mit AB parallel seyn wird, und die man nach Belieben verlängern kann.

II) Eine andere bequeme Methode ist folgende. (Fig. XXVI) Ausserhalb der Linie AB, mit der man eine parallele ziehen will, nehme man einen willkührlichen Punkt C an, und setze daselbst einen Stab ein: Hierauf gehe man in der geraden Linie BC fort, und setze auch bey a einen Stab in den Boden.

Die drey Linien AC, BC, Ca messe man, und suche zu BC, CA, Ca, die vierte Proportionallinie: Diese trage man in der verlängerten Richtung AC, von C nach b, so er-

hält man den Punkt b, und folglich die Linie ab, welche nach den bekannten Gründen der Geometrie, mit AB gleichlaufend seyn muß.

Ex. Es sey gemessen worden AC = 20'; BC = 18', aC = 15': so wird die Proportion

$$18 : 15 = 20 : Cb$$

folglich $Cb = \frac{20 . 15}{18} = \frac{10 . 5}{3} = 16,66..$
$= 16' 6'' 6'''$

Man trage also mit der Meßkette von C nach b eine Länge von 16' 6'' 6''', und setze bey b einen Stab hin, so ist ab mit AB parallel; und man kann ab, so weit man will, verlängern, indem man mit a und b Stäbe in eine Verticalebene oder gerade Linie bringt.

III) Es wurde in (II) C willkührlich angenommen, und a dadurch bestimmt, daß eine Stange bey a in die gerade Richtung BC eingesetzt wurde. Wäre a aber ein gegebener Punkt auf dem Felde, so muß man C in die gerade Linie Ba einsetzen, und dann eben so wie in II verfahren, um den Punkt b zu bestimmen; dieses zeigt, wie man durch einen gegebenen Punkt a auf dem Felde, eine mit AB parallele Linie ab ziehen könne.

Gebrauch entfernter Objekte, zu Ziehung paralleler Linien.

§. 60. 1. Wenn man auf dem Felde sich in einer Ebene befindet, in der man eine freye Aussicht nach Gegenständen haben kann, die hinlänglich weit vom Auge entfernt sind, so geben diese ein sehr bequemes Mittel, die Richtung paralleler Linien zu bestimmen.

2. Man weiß nämlich aus der Geometrie, daß man parallele Linien ansehen kann, als durchschnitten sie sich in einem unendlich weit entfernten Punkte. Schneiden sich daher ein paar Linien in einer endlichen Entfernung, so sind sie zwar nicht gleichlaufend, kommen aber doch der parallelen Lage immer näher, je weiter ihr Durchschnittspunkt hinausfällt.

3. Man kann also Linien, die sich in einem sehr weit entfernten Punkte durchschneiden, nicht völlig, aber doch beynahe als parallel betrachten.

Es sey demnach (Fig. XXVII) I ein sehr entferntes Objekt, z. E. die Spitze eines einige Meilen weit entlegenen Thurms oder Bergs. Man setze bey H und C ein paar Stäbe hin, so, daß H, C, I in einer Verticalebene, oder geraden Linie liegen. Eben so seyen auch F

und

und E ein paar andere Stäbe, mit I in gerader Linie, dergestalt, daß die beyden geraden Linien HC, FE verlängert, sich bey I durchschneiden würden: So wird man ohne merklichen Fehler, die Stücken HC, FE, als parallel ansehen können.

4. Um einigermaaßen die parallele Lage beurtheilen zu können, so gedenke man sich von F und E ein paar senkrechte Linien Fc, Ei, auf HI herab gefällt.

5. Wären nun HC, FE völlig genau parallel, so müßte Fc = Ei seyn.

6. So aber, wenn sich HC, FE bey I durchschneiden, wird Ei etwas kleiner, als Fc seyn; der Unterschied wird also den Fehler angeben, den man begeht, wenn man HC und FE für parallel annimmt.

8. Nun ist wegen der ähnlichen Dreyecke IEi, IFc,

$$IF : Fc = IE : Ei \text{ daher}$$

$$Ei = \frac{EI \,.\, Fc}{IF} \text{ und mithin}$$

der Unterschied $Fc - Ei = Fc - \frac{EI}{IF} \,.\, Fc$

$$= \frac{(IF - EI)\, Fc}{IF} = \frac{EF \,.\, Fc}{IF}$$

8.

8. Hieraus folgt, daß $Fc - Ei$ oder $\frac{EF \cdot Fc}{IF}$ d. h. der Fehler, den man begehet, wenn man das Stück FE als parallel mit HC annimmt, desto kleiner ist,

a) je weniger die beyden Stücke FE, HC, von einander abstehen, oder je kleiner Fc ist.

b) Je kleiner FE, und

c) Je weiter das Object I von F entfernt ist.

9. Ex. Wie viel weicht man von der parallelen Lage ab, wenn das Objekt I z. E. 2 Meilen oder 50000 Fuß entfernt wäre, und man in einer Weite Fc von 50 Fußen ein Stück FE von 100 Fußen, parallel mit HC abstecken wollte?

10. Hier ist also $FI = 50000'$; $FE = 100'$ $Fc = 50'$

daher $Fc - Ei = \frac{50 \cdot 100}{50000} = \frac{1}{10}$ Fuß $= 1''$, also ist das Perpendikel Ei nur um 1″ kleiner, als Fc; man kann folglich das Stück FE als parallel mit HC ansehen, da die Abweichung von der parallelen Lage so unbeträchtlich ist. Wie würde man fast auf eine andere Art eine so genaue parallele Lage erhalten können?

11. Man siehet, daß der Gegenstand I nicht einmal so weit entlegen zu seyn braucht, als ich

ich angenommen habe, selbst Gegenstände, die z. E. nur eine halbe Meile, ja nicht einmal so weit entfernt sind, können auf dem Felde, unter gewissen Umständen, schon zu Ziehung paralleler Linien dienen; wenigstens läßt sich die Abweichung von der parallelen Lage, in jedem Falle leicht beurtheilen.

12. Es ist sin I = $\frac{Fc}{FI}$, also der Winkel bekannt, unter welchen sich bey I die beynahe parallelen Stücke HC, FE durchschneiden.

Da nun der Winkel I immer sehr klein seyn wird, so kann man sin I = I setzen, und den Winkel I in Secunden ausdrücken, dann wird

$$I = \frac{Fc}{FI} . 206264 \text{ Secunden.} (\text{Tr. S. VII})$$

13. Ex. Bey den obigen Datis (9) würde

$$I = \frac{50}{50000} . 206264'' = 206'', 26 =$$

3' 26'', 26. Es schneiden sich also die Stükken HC, FE, bey I unter einem sehr kleinen Winkel;

14. Dieses Verfahren, vermittelst eines weit entlegenen Gegenstandes, durch einen gegebenen Punkt F eine Linie FE, mit einer andern HC parallel zu ziehen, kann in vielen Fällen sehr brauchbar seyn, wie die Folge zeigen wird.

15.

15. Wenn mit H, C, die parallele FE gezogen werden soll, so muß man erst nach H hingehen, und untersuchen, auf welchen Gegenstand I, am entlegenen Horizonte, die Gesichtslinie HC hintrift; mit diesem Objekte I, werden alsdann F und E in eine gerade Linie gebracht.

16. Allein wenn man ein gutes Augenmaaß hat, und keine gar große Schärfe verlangt, so braucht man nicht einmal vorher nach H hinzugehen, um den Punkt I am Horizonte zu bestimmen, der mit H, C in gerader Linie liegt. Es kann dieses selbst bey F geschehen. Man verlängere in Gedanken die gegenüberstehende gerade Linie HC, bis an den Horizont, bemerke den Punkt I, wo sie hintrift, und setze dann F und E, mit I in eine gerade Linie.

17. Es wird sich freylich, wenn man bey F die Richtung HC nur nach dem bloßen Augenmaaße verlängert, nicht so genau der Punkt I bestimmen lassen, als wenn man selbst an H und C hinausvisirte. Allein man kann sich auch bey diesem Geschäfte eine Uebung erwerben, um wenigstens nicht beträchtlich zu fehlen.

Wenn man sich z. E. auf dem Felde bey F befindet, so wähle man ein paar Objekte H, C, z. E. ein paar Bäume, und suche nach dem

Au-

Augenmaaße am Horizonte den Punkt I, der mit ihnen in gerader Linie zu liegen scheinet. Dann gehe man nach H, visire an H, C, hinaus, so wird sich finden, ob der nach dem Augenmaaße gefundene Punkt I, von denen H und C bedeckt wird, und sich also in der That in der geraden Linie HC befindet. Stellet man solchergestalt den Versuch oft an, so wird man bald eine Fertigkeit erhalten, ohne großen Fehler eine gerade Linie auf dem Felde, nach dem bloßen Augenmaaße, so weit man will, zu verlängern, wenn sich gleich das Auge nicht selbst in der geraden Linie befindet. Man sehe mehreres hievon in Lamberts Beyträgen zur Mathematik I. Th. §. 37.

18. So könnte also das bisherige Verfahren in dem Falle brauchbar seyn, wenn z. E. FE auf dem Felde, mit HC parallel gezogen werden sollte, und zwischen FE, HC befände sich ein Hinderniß, daß man nicht nach H hinkommen, an H und C würklich hinaus visiren, und so am Horizonte die Stelle I bestimmen könnte.

Einige Anwendungen des bisherigen.

§. 61. 1. Es kann sehr oft geschehen, daß man bey Messung gerader Linien auf dem [illegible]de auf Hindernisse trifft, welche die Arbeit un=

unterbrechen, und die Messung erschweren. Z. E. wenn auf der geraden Linie, die man messen oder abstecken wollte, sich ein ein tiefer Morast befände, den man nicht durchwaden könnte, oder wenn ein Gebäude der freyen Aussicht auf der geraden Linie hinderlich wäre u. s. w. In solchem Falle werden die Aufgaben (§. 59.) gute Dienste leisten können.

1. Es sey also Fig. XXVIII die gerade Linie AC zu messen, und bey F sey ein Morast, der die Messung unterbricht.

Ich will setzen, man sey mit der Messung von A bis a gekommen, so daß bey a sich eine ganze Kettenlänge b a, oder ein gewisser Theil der zuletzt ausgespannten Kette endigte.

3. Weil nun wegen des Hindernisses F nicht weiter in der geraden Linie AC fortgemessen werden kann, so ziehe man nach §. 59. neben der Linie AC eine parallele DE her, in einer solchen Weite von AC, daß man ohne Hinderniß auf DE hermessen kann. Es wird aber gut seyn, DE so nahe neben AC herzuziehen, als es der Morast F erlaubt.

4. Um also die Lage der Parallellinie DE zu erhalten, so zähle man auf der in der Richtung AC zuletzt ausgespannten Kette b a rückwärts von a nach β z. E. 3 Fuß. Nun neh-

man eine Meßschnur, auf welcher aber Fuße von eben der Länge, wie auf der Kette, seyn müssen, fasse auf ihr eine Weite von 9 Fußen, lasse die beyden Enden dieser 9 Fuß, bey a und β fest anhalten, und spanne die Schnur nach den Richtungen ac, βc an, so daß ac 4 Fuß und βc 5 Fuß wird, so erhält man nach (§. 58. V) bey a einen rechten Winkel βac, und es ist ac senkrecht auf Aa.

5. Die Richtung des Perpendikels ac verlängere man bis D so weit nämlich, daß man durch D neben den Morast die Linie DE parallel herziehen kann, und messe die Weite aD. Bey D setze man eben so, wie die Figur ausweiset, und in (4) gewiesen worden, einen rechten Winkel iDe an, so erhält man die Richtung De, die mit AC parallel ist, und welche man bis E, so weit der Morast gehet, verlängern kann.

6. Endlich setze man auch noch bey E einen rechten Winkel mEn an, so daß En auf DE perpendiculär stehe, und verlängere En bis r, so wird, wenn Er = Da gemacht worden, der Punkt r wieder auf die gerade Linie AC zu liegen kommen, und man kann alsdann auf der Richtung AC von r nach C die Messung weiter fortsetzen.

Weil aber DE = ar ist, so darf man nur die Länge des parallelen Stücks DE gemessen haben,

haben, so hat man die Weite ar, welche wegen des dazwischen liegenden Morastes oder Hindernisses nicht unmittelbar gemessen werden konnte.

7. Wenn die Messung einer Linie, mit Maaßstäben geschiehet (§. 39.), und sich unterwegs ein Hinderniß vorfindet, so kann man mit einiger Veränderung, auf eine ähnliche Art verfahren.

8. Nur die zur Ziehung der Parallellinie DE nöthigen rechten Winkel wird man bequemer und richtiger auf folgende Art bestimmen können.

9. Man lasse, Fig. XXIX, ein paar glatt gehobelte, etwa 3 Fuß lange Leisten im, dh, wie die Figur ausweiset, in einen rechten Winkel zusammenfügen, und ziehe auf der Leiste dh mit aller möglichen Sorgfalt eine gerade Linie $\alpha\beta$, parallel mit der Seitenlinie dh.

Auf $\alpha\beta$ nehme man den Punkt m an, und errichte durch ihn auf $\alpha\beta$ eine Perpendicularlinie mi; dieses kann blos geometrisch, oder auch vermittelst eines wohl geprüften Winkelhakens bewerkstelligt werden. Bey m und i, schraube man senkrecht ein paar Stiften ein, an die man hinausvisiren kann.

10. Nun setze man, man sey mit der Messung bis a gekommen Fig. XXVIII. Bey a, b,

befanden sich ein paar Schemmel auf denen der zuletzt angelegte Maaßstab ab ruhet.

11. Um nun an die Richtung des Maaßstabes ab eine Perpendiculärlinie aD anzusetzen, so bringe man nach c einen Schemmel hin.

12. Man nehme den in (9) und Fig. XXIX. beschriebenen rechten Winkel, lege die Leiste dh genau an den Maaßstab a Fig. XXVIII an, so daß dh längst ab, und die Leiste mi auf die beyden Schemmel bey a und c, längst ac zu liegen komme, und gebe, wie gewöhnlich, der auf a und c ruhenden Leiste mi eine horizontale Lage. Dann macht die Richtung der Leiste mi mit dem anliegenden Maaßstabe ab einen rechten Winkel, und wenn man an den Stiften m und i (9) hinausvisirt, so läßt sich bey D ein Stab abstecken, und folglich auf dem Felde der rechte Winkel baD bestimmen.

13. Demnächst bestimme man genau den Punkt a, welcher von der Visirlinie im auf dem Maaßstabe ab abgeschnitten wird; so weit werden nämlich auf dem zuletzt gelegten Maaßstabe ba die Maaße genommen.

14. Hat man nun auf diese Art die Weite Aa gemessen, und auf dem Boden die Stelle bemerkt, die vertical unter dem Endpunkte der gemessenen Weite Aa, oder unter dem Punkte a (13) liegt, so wird alsdann von a bis D

die

die Messung fortgesetzt, und so wie vorhin (12) auf die Linie Aa das Perpendikel aD gesetzt wurde, so verfährt man auch jetzt bey D, errichtet auf aD die Perpendiculärlinie DE; misset die Weite DE, setzt an E wieder den rechten Winkel mEr an, und macht endlich, wie in (5) Er = Da.

15. Man begreift, wie diese Aufgabe bey unzählichen Fällen brauchbar seyn kann, das Hinderniß F mag, von welcher Art man will, seyn. Z. B. F könnte in einem Walde, wo man mit einer Messung beschäftigt wäre, ein dicker Baum seyn, der im Wege stände. In diesem Falle würde sich die Parallellinie DE sehr nahe neben AC hernehmen lassen; Auch könnte man da die rechten Winkel bloß durchs Augenmaaß bestimmen.

Sobald aber die Linie DE in beträchtlicher Weite neben AC genommen werden muß, so ist es nöthig, die zur Ziehung der Parallele DE nöthigen rechten Winkel, so scharf als möglich, zu bestimmen.

16. In (4) habe ich des Beyspiels wegen βa = 3 Fuß, ac = 4 Fuß, βc = 5 Fuß genommen. Kann man die erwähnten Linien in eben dem Verhältnisse noch größer machen, so wird sich dadurch der rechte Winkel bac desto genauer ergeben. Um ferner in (5)

die Richtung des gefundenen Perpendikels ac bis D zu verlängern, rathe ich nicht, bey a und c Stäbe hinzusetzen, und an ihnen hinaus zu visiren. Sicherer verfährt man, wenn man längst ac eine Schnur anspannt, und sie bis D hinreichen läßt.

17. Man könnte auch beym Gebrauch der Kette in (4) sich des Winkelhakens (Fig. XXIX) zur Bestimmung des Perpendikels ac bedienen. Man würde nemlich (Fig. XXVIII) die Leiste dh des Winkelhakens, an die ausgespannte Kette ba legen, und nun längs den Stifften m und i, eine Schnur ausspannen, die man bis D gehen liesse. Auch ist begreiflich, daß man, im Falle man von r nach A eine freye Aussicht hat, die Weite aD nicht zu messen und von E und r zu tragen, nöthig hat. Nachdem man nemlich blos aD senkrecht auf Aa, alsdann DE senkrecht auf aD, und in E die Schnur Er senkrecht auf DE, gesetzt hat, darf man bey r nur den Punkt der Schnur Er bestimmen, welcher mit a und A in gerader Linie liegt, um von r aus, die Messung weiter fortsetzen zu können, wo denn ebenfalls die gemessene DE = ar ist.

18. Es können bey diesen Arbeiten auch andere Werkzeuge zum Abstecken rechter Winkel (m. s. unten §. 127) sehr nützlich seyn. In Georg Adams geometrischen und gra-

graphischen Versuchen oder Beschreibung der mathematischen Instrumente, deren man sich in der Geometrie, der Civil- und Militairmessung ꝛc. bedient, aus dem Engl. von J. G. Geisler, Leipzig 1795. sind S. 279. und Tafel XIV. einige solche Werkzeuge beschrieben und abgebildet. (Diopterkreuz, Feldmesserkreuz, l'Equerre d'arpenteur.). Man sehe auch Bugge oben (§. 31.) angeführte Schrift §. 68.

VI. Kapitel.

Vom Abtragen gerader Linien aufs Papier, nebst verschiedenen Methoden, sie in gegebenen Verhältnissen zu theilen.

§. 62. Wenn auf dem Felde eine gerade Linie der jedesmahligen Absicht gemäß, ausgemessen worden, so muß man sie auch mit der gehörigen Schärfe aufs Papier abtragen können.

Da wir nicht im Stande sind, auf dem Papiere, vermittelst der bekannten Werkzeuge. das Bild einer vollkommen mathematischen Linie zu entwerfen, so müssen wir uns doch bemühen, demselben, so viel sich thun läßt, nahe zu kommen. Dieses ist eine Hauptregel, die ich in der Folge immer zum voraussetze, wenn ich von Ziehung gerader Linien rede. Geschieht dieses nicht, so unterwerfen wir uns der Gefahr, auf dem Papiere, nach Verhältniß, weit beträchtlichere Fehler zu begehen, als bey der unmittelbaren Messung auf dem Felde.

2. Das heißt: Man muß auf dem Papiere die Punkte und Linien so

zart und rein verzeichnen, als es nur immer, vermittelst der besten Werkzeuge geschehen kann.

3. Die Werkzeuge, gerade Linien und Punkte zu zeichnen, sind so bekannt, daß ich es für sehr überflüssig halte, hier eine umständliche Beschreibung derselben mitzutheilen. Man findet sie in den so genannten Reißzeugen oder mathematischen Bestecken. Nur muß ich von den nöthigsten Vollkommenheiten gedächter Werkzeuge kürzlich einiges beybringen.

4. Die Güte eines Handzirkels bestehet darinnen: Erstlich, daß die Spitzen desselben von gehärteten Stahl und sehr scharf sind. Zweitens, daß sich die Schenkel des Zirkels, im sogenannten Kopfe desselben, um ein stählernes Gewinde herumdrehen. Drittens, daß dieses Gewinde so beschaffen sey, daß sich zwar die Schenkel sehr sanft und gleichförmig öffnen lassen, aber doch auch aus der Lage, worin sie einmal gebracht sind, sich nicht leicht wieder verrücken. Man pflegt daher sich auch eines Schlüsselchens zu bedienen, das Gewinde mehr oder weniger anzuziehen, wenn es darum zu thun ist, die Schenkel in einem beliebigen Winkel fest zu erhalten. Viertens, wenn man die Schenkel zusammen legt, so müssen die Spitzen des Zirkels

genau in einen gemeinschaftlichen sehr feinen Punkt zusammen treffen.

5. Es ist bey practischen Arbeiten vortheilhaft, verschiedene Gattungen von Handzirkeln zu besitzen. Einige davon müssen so eingerichtet seyn, daß sich der eine Fuß herausnehmen, und statt dessen ein Einsatz zum Bleystift, oder eine mit einem Gelenk versehene Reisfeder hineinfügen läßt.

6. Man braucht die Zirkel überhaupt, sowohl Figuren abzutragen und zu verzeichnen, als auch Linien einzutheilen. Zu letzterer Absicht sind die sogenannten Federzirkel sehr vortheilhaft. Die Gestalt eines solchen Federzirkels ist ohngefähr aus Fig. XXX zu ersehen.

Daselbst ist statt eines gewöhnlichen Zirkelgewindes, das Stück ABCDHG von gehärteten Stahl; nämlich der obere Theil CDE, ist ein breites in einen Bogen gekrümmtes elastisches Stück, eine Feder, an welcher auf beyden Seiten die Schenkel CA, GE heruntergehen, in die, wie gewöhnlich, die Füße des Zirkels AL, GM eingesenket werden. BF ist ein mit feinen Schraubengängen versehener Zirkelbogen, der an dem einen Schenkel CA, bey B befestiget ist, an dem andern Schenkel EG her durch eine ihm gemäße Oefnung gehet. ist eine Schraubenmutter. Je nachdem

man

man nun diese rechts oder links herumdreht, treibt sie die Schenkel CL, EM näher zusammen, oder weiter von einander, und die elastische Kraft des in den Bogen gespannten Stücks CDE, welche beständig die Schenkel CL, EM auseinander zu treiben strebt, trägt vieles dazu bey, daß auch durch die geringste Umdrehung der Schraubenmutter H, die Entfernung der beyden Spitzen L, M, verändert wird, und man also die Endpunkte einer abzutragenden Linie sehr genau zwischen die beyden Spitzen L, M fassen kann. Wenn man einen solchen Federzirkel besitzt, so wird derselbe zur Eintheilung gerader Linien vortrefliche Dienste leisten.

7. Man gebraucht auch die sogenannten Haarzirkel, zu dieser Absicht. Man findet die Beschreibung davon in Leupolds Theatr. Mach. Geom. §. 287. Ich halte indessen den (6) beschriebenen Federzirkel für richtiger und zuverlässiger, als den Haarzirkel, welcher sehr leicht wandelbar wird.

8. Die Güte einer Reisfeder bestehet darinn, daß ihre gegeneinander über stehenden Plättchen, oder Backen, von gleicher Länge, nicht stumpf, aber dabey auch nicht zu scharf seyn müssen. Die Backen lassen sich vermittelst eines Schräubchens einander mehr oder weniger nähern, bis sie den gehörigen Abstand haben, um eine Linie von der erforderlichen

Stärke zu ziehen. Die Erfahrung muß entscheiden, ob eine Reisfeder taugt; je eine zärtere und reinere Linie man damit ziehen kann, desto vollkommener ist sie. Man kann ihr mit einer zarten englischen Feile, und einem Oelsteine, worauf man sie schleifet, nachhelfen, bis sie die gehörige Vollkommenheit hat. Beym Gebrauche taucht man die Spitze der Reisfeder in eine mit reinem Wasser abgeriebene gute indianische Tusche, und zieht hierauf längs eines Linials gerade Linien damit auf dem Papiere her. Man muß aber allemal die Backe der Reisfeder, welche längs der Schärfe des Linials fort bewegt wird, vorher abwischen, damit keine Flecken auf das Papier kommen. Die Uebung wird hiebey die beste Lehrmeisterin seyn.

Einige Reisfedern haben die Einrichtung, daß eine von den Backen derselben um ein Charnier beweglich ist, damit die Spitzen von einander getrennt werden können, um sie auf diese Art besser zu reinigen.

9. Die Vollkommenheit eines Linials besteht darinnen, daß dessen Schärfen genau in eine gerade Linie gebracht sind. Man verfertigt sie von guten trockenen Linden-, Buxbaum- oder Ebenholze, wie auch von Messing, Elfenbein u. s. w.; die von Metall beschmutzen

das

das Papier. Am besten sind die von Ebenholze, weil sich solche nicht leicht werfen.

10. Um die Schärfe, oder diejenige schmale Seitenfläche des Linials, längst welcher nähmlich die geraden Linien hergezogen werden, vollkommen eben und gerade zu machen, habe ich folgendes Mittel für gut befunden. Ich besitze ein ziemlich langes Stück von einem zerbrochenen Spiegel: auf dieses streue ich etwas feinen Schmergel oder Uhrsand, benetze ihn mit Wasser, und schleife nun die schmale Seitenfläche des Linials auf dieser Platte ab. Man muß aber während des Schleifens immer nach einerley Richtung hin- und herfahren, und so viel als möglich, gleich stark und senkrecht aufdrücken, damit nähmlich die abzuschleifende Fläche von dem Sande an allen Stellen gleich stark angegriffen werde. — Man könnte auch, um das hiebey schädliche Wanken, oder den ungleichen Zug zu verhüten, mehrere Liniale auf einmal abschleifen. Man legt ihre breiten Seitenflächen an einander, so daß die schmalen insgesammt in eine Ebene fallen, und so auf der Platte hin- und hergeführt und abgeschliffen werden; oder man liesse sich viereckigte prismatische glatt gehobelte Stäbchen verfertigen, legte sie an die breitern Seitenflächen des Linials, und führe so zugleich auf der Platte mit ihnen her. Auf diese Art ist die abzuschleifende Fläche größer, und ein Ungeübter setzt sich

nicht so leicht der Gefahr aus, während des Schleifens von einer Seite auf die andere zu wanken.

Wenn nun das Schleifen der Liniale einige Zeit fortgesetzt worden, und man bemerkt, daß der Sand ziemlich fein geschliffen, auch solcher die abgeschliffenen Flächen der Liniale an allen Stellen gleich stark angegriffen hat, so trockne man die Liniale ab, reinige sie von dem anhängenden Sande, und fahre alsdann mit einem Stückchen Tuch an der abgeschliffenen Fläche so lange hin und her, bis sie durch das Reiben vollkommen trocken geworden, und einen Glanz bekommen hat.

Auf diese Art erhalte ich die schmale Seitenfläche eines Linials vollkommen eben und gerade, so daß, wenn ich dergleichen abgeschliffene Flächen zweyer Liniale auf einander lege, und sie gegen das Licht halte, sie sich vollkommen decken, und nicht den geringsten leeren Raum zwischen sich lassen.

Wer ein solches Spiegelglas nicht besitzt, der lasse sich ein paar etwa 18 Zoll lange, 4 Zoll breite, und 3 Zoll dicke Platten von Eichenholz verfertigen, und sie glatt abhobeln. Hierauf schleife man sie mit trockenen Uhrsand auf einander ab, bis sie vollkommen eben geworden, und dieser hölzernen Platten bediene man

man sich alsdann, statt einer Spiegelplatte, um die Liniale darauf zu schleifen.

11. Die gewöhnliche Methode, sich von der Richtigkeit eines Linials zu versichern, bestehet darinnen, daß man auf dem Papiere längst des Linials, eine Linie ziehet, wie z. E. in Fig. XXXI längst des Linials MNOP die Linie rns; hierauf das Linial MNOP umkehret, so daß N nach N', M nach M', O nach O' und P nach P', zu liegen komme, und dann längst eben der Schärfe, neben der zuerst gezogenen Linie rns, wieder eine Linie rms ziehet. Wenn nun diese beyden Linien rms, rns, in eins zusammenfallen, und keine Höhlungen, wie hier z. E. bey m und n geschiehet, zwischen sich lassen, so wird die Seite oder Schärfe des Linials, bey der man diesen Versuch angestellt hat, zum Gebrauche gut seyn. Im entgegengesetzten Falle aber ist das Linial nicht zu gebrauchen, und muß also vorher (nach 10) abgeschliffen werden.

Es ist sehr gut, wenn man mit einem messingenen vollkommen geraden Liniale versehen ist, und andere darnach zu prüfen.

12. Die hölzernen rechtwinklichten Dreyecke, und Winkelhaken, so wie man sie gewöhnlich auch in Reiszeugen antrift, dienen zu Ziehung paralleler und senkrechter Linien. Die nothwendigste Erforderniß guter Winkel-

haken oder Dreyecke, wenn man sie zu Ziehung der Perpendikulärlinien gebrauchen will, bestehet darinnen, daß der rechte Winkel an diesen Werkzeugen, alle nöthige Genauigkeit habe. Es giebt unterschiedene Methoden, sich von der Richtigkeit eines Winkelhakens zu versichern.

Folgende Methode scheint mir die richtigste und bequemste zu seyn. Man lege den einen Schenkel des Winkelhakens oder des rechtwinklichten Dreyecks hbc (Fig. XXXIII) genau an die Schärfe ik eines wohlgeprüften Linials; drücke das Linial mit dem Daumen fest ans Papier, und ziehe darauf mit aller möglichen Sorgfalt genau längst des andern Schenkels hb, eine feine Linie auf das Papier. Nun lasse man das Linial in unverrückter Lage, und kehre den Winkelhaken um, so daß der Schenkel bc nach der Richtung bγ zu liegen komme. Wenn nun bey der jetzigen Lage des Winkelhakens hbγ, der Schenkel hb, wieder genau mit der vorhin auf dem Papiere gezogenen Linie hb zusammentrift, oder mit ihr parallel läuft, so ist der Winkelhaken richtig, und der Winkel, den beyde Schenkel hb, bc mit einander machen, genau ein rechter. Geschiehet dieses aber nicht, so bedarf der Winkelhaken einer Verbesserung. Es wird sich auch leicht aus dem Grunde dieses Verfahrens beurtheilen lassen, ob der Winkel hbc stumpf oder

spitzig

spitzig ist. Von andern Methoden s. m. Helfenzrieders Geodäsie. §. 193. 2c.

Ein anderes sehr brauchbares Verfahren ist auch: daß man auf einer ebenen Fläche, z. E. einem Reisbrette, oder noch besser auf einer ebenen Kupferplatte, nach den bekannten geometrischen Methoden, genau einen rechten Winkel verzeichnet, alsdann beyde Schärfen des Winkelhakens an die Schenkel des rechten Winkels anlegt, und prüfet, ob sie damit zusammentreffen, und wenn dieses nicht geschiehet, alsdann durch Abschaben oder Schleifen, die Schenkel des Winkelhakens verbessert, bis sie den gehörigen rechten Winkel mit einander machen.

13. Das gewöhnliche Parallel-Linial, welches aus zwey beweglichen, und mit gleich langen Gelenken verbundenen Linialen besteht, ist von sehr eingeschränkten und wandelbaren Gebrauche. Am besten und zuverlässigsten geschieht die Ziehung paralleler Linien, vermittelst eines guten Linials und Dreyecks, wie ich hernach zeigen werde.

14. Man hat einige zusammengesetztere Gattungen von Parallellinialen, bey welchen man zugleich die Absicht erreichen will, Parallellinien sogleich in beliebigen Weiten von einander zu ziehen, ohne diese Weiten erst mit einem

nem Zirkel von einem Maaßstabe abfassen zu dürfen. Man findet einige Beschreibungen und Abrisse davon in Leupolds *Theatro Mach. Geom.* §. 312. 321. 322.

15. Die meisten dieser Vorrichtungen sind unnütz und erreichen den Endzweck (14) nicht aufs bequemste und richtigste.

16. Folgende Einrichtung scheint mir zur Ausübung bequem und einfach zu seyn. S. die XXXII Fig. Daselbst sind ABC, DEF ein paar rechtwinklichte hölzerne Dreyecke von gleicher Größe und Dicke. Ihre längern Seiten BC, EF sind etwa einen Fuß, die kürzern AB, DE aber 4 bis 6 Zoll lang; dann haben diese Dreyecke eine ansehnliche Größe, wie erfordert wird.

Die Schenkel AB, BC, DE, EF kann man mit meßingenen Platten überlegen lassen, und Abtheilungen auf ihnen verzeichnen, wie die Figur ausweist.

Auf die längern Schenkel oder Seiten BC, EF kann man nach Gefallen eine gewisse Anzahl gleicher Theile absetzen: z. E. Zehntheile eines Zolles.

Damit sich aber noch kleinere Abtheilungen erhalten lassen, als unmittelbar auf BC, EF

EF verzeichnet sind, so dienet jeder kürzere Schenkel DE, AB, denen größern BC, EF zum Nonius oder Vernier. Die Art dieser Vorrichtung soll unten (§. 76.) erklärt werden, und hier erinnere ich nur noch dieses. Wenn die Seitenfläche DE, längst BC genau angelegt und fortgeschoben wird, so lassen sich längst EF Parallellinien ziehen, die entweder gleich weit, oder je nachdem auf BC von dem Nonius DE, die Abtheilungen abgeschnitten werden, in jeder beliebigen Entfernung von einander abstehen. Und eben so kann man auch längst BC Parallellinien in beliebigen Weiten von einander ziehen, wenn die lange Seite EF des Dreyecks DEF, an die kürzere AB gelegt, und alsdann das Dreyeck ABC längst EF herunter geschoben wird.

17. Durch diese Verbindung zweyer rechtwinklichten Dreyecke erreicht man also bequem die Absicht (14). Auch kann dieses Werkzeug, wie ich in der Folge zeigen werde, noch zu verschiedenen andern Arbeiten und Endzwecken nützlich seyn.

18. Auch der geschickte und scharfsinnige Mechanikus Brander in Augspurg verfertigte ehemals Parallelliniale von großer Vollkommenheit. Sie sind gleichfalls so eingerichtet, daß sich sogleich Parallellinien in beliebigen Weiten ziehen lassen. Br. erinnert aber, daß diese

Werkzeuge mit grosser Genauigkeit und Sorgfalt verfertiget werden müssen, wenn sie den erwünschten Endzweck erreichen sollten. Er erwähnet dieser Parallelliniale in seiner Beschreibung eines Systems von Maaßstäben am Ende pag. 30. Ich habe aber nie ein solches Parallellinial gesehen, auch befindet sich am a. O. keine nähere Beschreibung und Abriß davon.

Von den in Engelland häufig üblichen Roll-Parallellinialen sehe man Adams oben §. 61 angeführtes Buch S. 29. Man kann sie füglich entbehren. Auch das. von einigen anderen Einrichtungen solcher Werkzeuge.

19. Da die Ziehung paralleler und senkrechter Linien in der Ausübung oft vorkömmt, so sollen folgende zwey Aufgaben kürzlich den Gebrauch der rechtwinklichten Dreyecke zu dieser Absicht erläutern.

Es giebt zwar in der theoretischen Geometrie sehr viele Methoden, bloß durch Zirkel und Linial, parallele und senkrechte Linien zu ziehen; allein, so richtig auch die reinen geometrischen Auflösungen sind, so kann man sie dennoch in der Ausübung nicht mit Vortheil da gebrauchen, wo man geschwind zu Werke gehen will.

Aufgabe.

Aufgabe.

§. 63. Auf eine vorgegebene Linie vermittelst des Dreyecks oder Winkelhakens (§. 62. 12) eine Perpendikulärlinie aufzurichten.

Aufl. Man lege den einen Schenkel des rechten Winkels an die vorgegebene Linie genau an, und ziehe längst des andern auf dem Papiere eine gerade Linie herunter, so wird diese auf der erstern senkrecht stehen.

Aufgabe.

§. 64. Mit einer gegebenen Linie ACG, Fig. XXXIII. durch einen gegebenen Punkt F, eine parallele zu ziehen.

Aufl. Man lege die Hypothenuse HC des Dreyecks HBC genau an die Linie AG an.

Dann nehme man ein Linial ik, lege dessen Schärfe an den Katheten BC an, drücke es fest ans Papier, damit es sich nicht verrücke, und schiebe nun das Dreyeck HBC an dem Liniale fort, daß solches in die Lage hbc komme, wo die Hypothenuse hc durch den gegebenen Punkt F gehet. Hierauf ziehe man längst hc eine Linie, so wird diese mit AG gleichlaufend seyn. Denn es ist der Winkel HCB = hcb.

$oa : on = 1 : 10 = a1 : mn$ also.

$a1 = \frac{1}{10} mn = \frac{1}{10}$ Fuß = 1 Zoll

$ob : on = 2 : 10 = b2 : mn$ also

$b2 = \frac{2}{10} mn = \frac{2}{10}$ Fuß = 2 Zoll.

und eben so

$c3 = \frac{3}{10} mn = \frac{3}{10}$ F. = 3 Zoll u. s. w.

Und so erhielte man sehr bequem, Theile der vorgegebenen Länge mn.

III) Nun sey (Fig. XXXV. A) a II eine gerade Linie auf dem Papiere. Man setze auf sie eine gewisse Anzahl gleicher Theile a O = O I = I. II u. s. w. und lasse einen solchen Theil auf dem Papiere eine Ruthe bedeuten.

IV) Man theile die äusserste Ruthe aO in 10 gleiche Theile, welches man durch Versuche bewerkstelligen kann, so ist $Ob = \frac{1}{10}$ Ruth. = 1 Fuß, $Oc = \frac{2}{10}$ R. = 2 Fuß u. s. w.

V) Da nun meistens auf dem Papiere die Theile auf aO schon sehr klein ausfallen, so würde es Schwierigkeit haben, diese Theile wieder unmittelbar noch weiter in Zolle einzutheilen; man bedienet sich daher des Satzes (I) mit Vortheil auf folgende Art.

VI) Durch a errichte man auf a II eine Perpendiculärlinie a α (§. 63) setze auf sie 10 willkührliche gleiche Theile von a nach 1, von 1 nach

nach 2 u. s. w. Ziehe durch 1, 2, 3, u. s. w. wie die Figur ausweiset, parallelen mit der Grundlinie a II (§. 64) und durch O, I, II, u. s. w. auch mit aα Parallelen.

VII) Von α nach dem nächsten Theilpunkte bey a, nähmlich nach k, ziehe man eine schiefe Linie αk herunter, und mit αk durch die übrigen Theilpunkte auf aO, die Parallelen βi; γh u. s. w. unter welchen Om die letzte ist.

VIII) So erhält man am Ende ein schmales Dreyeck Omn, wie in Fig. XXXIV, in welchem $mn = \frac{1}{10} \alpha n = \frac{1}{10}$ aO = 1 Fuß ist. Weil nun On vermittelst der mit a II parallel gezogenen Linien in 10 gleiche Theile getheilet wird, so ergeben sich in dem schmalen Dreyecke Omn, von mn nach O herunter, solche Transversalstückchen, wie in Fig. XXXIV, die also Zehntheilchen der Linie mn oder eines Fußes, mithin Zolle vorstellen werden. (II)

IX) So hat man also auf dem Papiere einen Maaßstab A, der auf eben die Art, Ruthen, Fuße und Zolle im kleinen enthält, wie das Maaß, dessen man sich auf dem Felde bedient, dergleichen im großen hat.

X) Es erhellet, wenn OI, I. II. u. s. w. Fuße vorstellen, so bedeuten die Theile auf aO Zolle, und die Querstückchen in dem Dreyecke Omn, Linien.

XI

XI) Hätte man von O gegen die rechte Hand zu, 10 Ruthen oder Theile abgesetzt, so bekäme man eine Länge, von der sind die Theile Ol, u. s. w. Zehntheilchen, die Stücken auf aO Hunderttheilchen, und die Querstückchen in dem Dreyecke Omn, Tausendtheilchen: So zeigt also dieses Verfahren überhaupt, eine Linie in 1000 Theile zu theilen, und ein solchergestalt eingerichteter Maaßstab heißt ein tausendtheiligter Maaßstab, dessen Gebrauch von häufiger Anwendung ist.

XII) Wollte man einen Maaßstab für die 12theiligte Eintheilung verfertigen, so darf man nur überall, wo bisher 10 Theile hingesetzt worden, zwölf dergleichen hinsetzen.

XIII) Bey B, C, D finden sich noch einige andere Gattungen von verjüngten Maaßstäben, die aus der Zeichnung hinlänglich zu verstehen seyn werden. Bey B, sind aO, OI, I. II. Ruthen, und die Querstückchen in dem Dreyecke PMO, nach der Ordnung von O nach PM heraufgerechnet, die einzeln Fuße. Bey C ist oben Bm bey 5 halbirt, und es sind a5, O5 gezogen; also ist $m5 = \frac{1}{2} mB = \frac{1}{2} aO = \frac{1}{2}$ Ruthe = 5 Fuß, und folglich weil auf aB, 5 gleiche Theile abgesetzt worden,

$$d1 = \frac{1}{5}\, m5 = \frac{1}{5} \cdot 5 \text{ Fuß} = 1 \text{ Fuß}$$
$$c2 = \frac{2}{5}\, m5 = \frac{2}{5} \cdot 5 \text{ Fuß} = 2 \text{ Fuß}$$

Eben

Eben so ist auch $\alpha 6 = a 4 = 4$ Fuß. Mithin $a 6 = a \alpha - \alpha 6 = 10$ Fuß — 4 Fuß = 6 Fuß. Und eben so wegen $\beta 7 = 3$ Fuß; $\gamma 8 = 2$ Fuß; $\delta 9 = 1$ Fuß, wird nach der Ordnung $b 7 = 7$ Fuß; $c 8 = 8$ Fuß; $d 9 = 9$ Fuß. Diese Einrichtung des Maaßstabes C ist sehr bequem.

Anmerkung.

§. 66. 1. Wenn man die bisher beschriebenen Maaßstäbe auf dem Papiere verfertigt, so muß man Sorge tragen, die Theilpunkte mit den Zirkelspitzen, so zart als möglich, anzugeben; auch muß man, wenn mit dem Zirkel die Maaße abgenommen werden, niemals die Spitzen desselben tief ins Papier einstechen, weil sonst der Maaßstab gar bald unbrauchbar und unrichtig würde.

2. Aus dieser Ursache bedient man sich auch wohl solcher Maaßstäbe, die auf Elfenbein, Birnbaumholz oder Messing verzeichnet sind. Man findet sie ebenfalls in den mathematischen Bestecken.

3. Man kann auch mit leichter Mühe, auf einer wohlpolirten messingenen oder kupfernen Platte, dergleichen Maaßstäbe von verschiedener Größe, selbst einreissen, und solche zum Gebrauche verwahren. Man darf sich nur ein wenig in dergleichen Arbeit üben, so wird man

es gar bald darin zu einer Fertigkeit bringen. Um die Linien ins Metall einzureissen, bediene ich mich eines guten englischen Federmessers, dessen Spitze von Stahl, und scharf abgeschliffen ist, oder auch eines sehr geschärften konischen stählernen Punzens. Nachdem die Linien eingerissen sind, schleift und polirt man das Rauhe von der Platte, vermittelst sehr feinen Schmergels oder Trippels ab, und überziehet sie mit einer Druckerschwärze, nach deren Wegwischung alsdann sehr zarte Linien auf der Platte stehen bleiben.

4. In Marinoni's Werke *de re ichnographica* (*Viennae* 1751) pag. 46 findet sich ein sehr bequemes und einfaches Werkzeug, Linien in sehr nahen Entfernungen, mit einander parallel, und sehr zart, ins Metall einzuschneiden,

Auch in Helfenzrieders Geodäsie (Ingolstadt und Augspurg 1775) p. 81 ist ein zu dieser Absicht angegebenes Instrument.

Ferner gehört hieher das Werkzeug, dessen sich der berühmte englische Künstler Ramsden bedient, gerade Linien einzutheilen. Es findet sich in einem Anhange zu einer Schrift, welche ich unten (§. 89) anführe. Das Werkzeug ist aber sehr zusammengesetzt, und die Genauigkeit desselben hängt mit von einer Schraube ohne Ende ab, welche längst der Schärfe eines Linials in Gänge eingreift, wodurch

wodurch das Linial sanft in Ruthen hin und her geschoben, und um einen beliebigen Abstand fortbewegt werden kann. Dieses Werkzeug würde demnach ebenfalls zur Eintheilung und Verfertigung verjüngter Maaßstäbe dienen, zumahl wenn eine sehr große Genauigkeit erforderlich wäre.

5. Man hält den Tycho de Brahe für den Erfinder des verjüngten Maaßstabes, eigentlich ist es aber wohl Joh. Hommel, ehemaliger Prof. der Mathematik zu Leipzig, aus dessen Unterrichte Tycho de Brahe ums Jahr 1553 zuerst diese Abtheilung gerader Linien gelernt hat.

Aufgabe.

§. 67. Den Gebrauch des verjüngten Maaßstabes zu erklären.

Aufl. I) Gesetzt man wolle von dem verjüngten Maaßstabe A (Fig. XXXV.) eine Länge z. B. von 2° 8′ 6″ mit dem Zirkel fassen, und aufs Papier tragen.

Um dieses zu leisten, so zähle man von O nach II, erstlich 2° ab: hierauf setze man die eine Zirkelspitze in den Punkt y, nähmlich in den Durchschnittspunkt des Perpendikels II. M, mit derjenigen Parallellinie y6, welche

auf $a\alpha$, durch den Theilpunkt 6 gehet, so findet sich auf dieser Parallele in dem Dreyecke mnO das Querstückchen $l\eta = 6''$. Nun lasse man die Zirkelspitze in y unverrückt, und öffne den Zirkel so weit, bis dessen andere Spitze, auf der vorerwähnten Parallele bis an den Durchschnitt t hinreicht; dieser Punkt t ist nähmlich der Durchschnitt der obgedachten Parallele 6y, mit der schiefen Linie βi, die auf aO, die Weite $Oi = 8$ Fuß abschneidet.

So wird die Weite $ty = 2° \; 8' \; 6''$ seyn. Denn es ist $ty = y\eta + \eta l + lt = O\,II + l\eta + Oi = 2° + 6'' + 8'$, oder $2° \; 8' \; 6''$.

Diese abgefaßte Weite zwischen beyden Zirkelspitzen, kann man nun aufs Papier tragen.

II) Umgekehrt, wäre auf dem Papiere eine Linie vorgegeben, deren Größe man nach dem verjüngten Maaßstabe bestimmen wollte, so fasse man solche mit dem Zirkel, behalte den Zirkel in unveränderter Oeffnung, und suche nun ein solches Perpendikel z. E. II. M auf, daß, wenn die eine Zirkelspitze in einen gewissen Theilpunkt, z. E. in y eingesetzt wird, die andere Spitze innerhalb des Raumes $a\alpha$On in einen Durchschnittspunkt, wie t, hinfalle, der mit y in einer geraden Linie ty liegt, die mit der Grundlinie a II parallel geht. Alsdann

kann

kann man die Weite ty auf dem verjüngten Maaßstabe in Ruthen, Fußen und Zollen bestimmen.

Zusatz.

§. 68. Wäre der Maaßstab A ein tausendtheiligter (§. 65. XI.), so würden die 2° 8′ 6″ (§. 67. I.) auch so viel bedeuten, als 286 Tausendtheilchen derjenigen Länge, die von O gegen die rechte Hand zu abgesetzt, und = 10. OI oder 10° genommen worden ist.

Aufgabe.

§. 69. Vermittelst des verjüngten Maaßstabes, Linien von gegebenen Verhältnissen aufs Papier abzutragen, oder sie auch in gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Aufl. I) Diese Aufgaben kommen in der Ausübung häufig vor, und aus dieser Ursache muß ich ihrer hier erwähnen.

Gesetzt, man solle ein paar Linien aufs Papier hintragen, die sich wie 512 : 618 verhielten. Um dieses zu leisten, nimmt man von dem tausendtheilichten Maaßstabe 512 Theile, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche 5° 1′ 2″ ab, und setzt sie aufs Papier; eben

so fasset man die Weite 6° 1′ 8″ und setzt sie ab, so hat man auf dem Papiere ein paar Linien, die sich wie 512 : 618 verhalten.

II) Wäre das Verhältniß der abzutragenden Linien durch so große Zahlen gegeben, (z. E. wenn das Verhältniß wie 5102 : 6733 wäre) daß man solche von dem tausendtheilichten Maaßstabe nicht bequem abtragen könnte, so muß man entweder versuchen, nach den gewöhnlichen Regeln, das vorgegebene Verhältniß durch kleinere Zahlen auszudrücken, oder wenn dieses nicht angehet, beyde Glieder des Verhältnisses mit einer dritten Zahl gemeinschaftlich dividiren, damit man wenigstens ein paar andere ganze Zahlen bekomme, die beynahe das vorgegebene Verhältniß unter sich haben, und sich von dem Maaßstabe abtragen lassen.

Z. E. Man dividire beyde Glieder des Verhältnisses 5102 : 6733 mit 10, so ist das vorgegebene Verhältniß wie 510, 2 : 673, 3 also beynahe wie 510 : 673, welches letztere man also von dem Maaßstabe abtragen kann.

Es erhellet nähmlich, daß man ein vorgegebenes Verhältniß, von einem tausendtheilichten Maaßstabe auch nur höchstens bis auf tausendtheilchen genau abtragen kann, vorausgesetzt, daß der Maaßstab die gehörige Vollkommenheit

heit habe, und man alle nöthige Vorsichten im Einsetzen der Zirkelspitzen beobachte.

III) Soll eine Linie AD (Fig. XXXVI.) in so viel Theile, als man will, getheilt werden, die gegebene Verhältnisse, z. E. wie 13 : 14 : 20 unter einander haben, so trägt man auf eine durch A nach Gefallen gezogene gerade Linie Dd, von A nach b, 13 Theile, von A nach c, 13 + 14 oder 27 Theile, von A nach d, 13 + 14 + 20 oder 47 Theile, von dem Maaßstabe ab; ziehet durch D, d, eine gerade Linie, und mit ihr durch c, b, die Parallelen Cc, Bb, (§. 64.) so werden die Stücke AC, BC, CD sich verhalten, wie Ab : bc : cd oder wie 13 : 14 : 20.

IV) Wer die Ziehung paralleler Linien vermeiden will, kann auch AD bloß durch Rechnung, oder arithmetisch theilen. Man fasse die Weite AD mit dem Zirkel und trage sie auf den Maaßstab. Gesetzt man fände AD = 5° 0′ 4″ oder 504 Theile. Diese Zahl theile man in drey Theile, die sich verhalten wie 13 : 14 : 20. Dieß geschieht nach der gewöhnlichen Regel auf folgende Art:

Man addire die vorgegebenen Verhältnißzahlen 13, 14, 20 zusammen, suche zu ihrer Summe 47, zur Zahl 504 und zu jeder einzeln Zahl 13, 14, 20, nach der Ordnung die 4te Proportionalzahl;

$$47 : 504 = 13 : 139\tfrac{19}{47}$$
$$47 : 504 = 14 : 150\tfrac{6}{47}$$
$$47 : 504 = 20 : 214\tfrac{22}{47}$$

so ist $139\frac{19}{47} + 150\frac{6}{47} + 214\frac{22}{47} = 504$, und die drey Stücke, in welche 504 zerlegt worden, verhalten sich wie 13 : 14 : 20.

Man trage also auf AD von A nach B $139\frac{19}{47}$ Theilchen des verjüngten Maaßstabes; weil sich aber die $\frac{19}{47}$ nicht gut abnehmen lassen, so setzt man blos von A nach B 139 Theile, oder $1^{\circ}3'9''$ und von B nach C 150 Theile, oder $1^{\circ}5'0''$ so wird AD so genau in dem Verhältniß 13 : 14 : 20 getheilet seyn, als man es in der Ausübung verlangen kann.

V) Ich wollte rathen, allemahl lieber nach (III) die Linie AD einzutheilen, weil man da nicht nöthig hat, solche kleine Brüche, wie in (IV) wegzulassen.

Indessen würde dabey noch folgendes zu erinnern seyn:

1) Es ist nicht nothwendig, daß man von dem verjüngten Maaßstabe gerade die Zahlen 13, 14, 20 (III) selbst annimmt; man könnte auch andere Zahlen oder Theile abnehmen, die sich nur verhalten müssen, wie die 13, 14, 20. Z. E. man könnte jede von den Zahlen 13, 14, 20 mit einer gewissen dritten Zahl erst multiplici-

ren,

ren, z. E. mit 10, von dem Maaßstabe alsdann von A nach b, 130 Theile, von A nach c, 140 Theile, und von A nach d, 200 Theile absetzen, und hierauf mit Dd die Parallelen ziehen.

Dieß dient dazu, daß, wenn die gegebenen Zahlen gar zu klein sind, und sich folglich nicht bequem mit dem Zirkel auf dem Maaßstabe fassen lassen, man statt ihrer, größere Zahlen bekömmt, die in eben dem Verhältnisse stehen, sich aber bequemer abtragen lassen, und eine genauere Ziehung der Parallellinien verstatten.

2. Muß man den Winkel DAd nicht gar zu klein annehmen, weil sich sonst bey A die Linien AD, Ad, zu sehr an einander fortschleifen, und daher Unrichtigkeiten zu besorgen sind.

VI) Sollte eine Linie, wie AG (Fig. XXXVII.) in lauter gleiche Theile, z. B. in 6 eingetheilt werden, so fasse man ihre Weite AG, und trage sie auf den Maaßstab. Gesetzt, man fände für sie 864 Theile. Hievon ist der 6te Theil = 144 Th. Man nehme also von dem Maaßstabe 144 Theile, oder 1° 4′ 4″, und trage sie nach der Ordnung von A bis B, von B bis C u. s. w. so wird AG in 6 gleiche Stücke getheilt seyn.

VII)

VII) Hätte man die 144 Theile nicht sehr genau von dem Maaßstabe abgenommen, und man trüge sie nach der Ordnung von A nach B, von B nach C u. s. w. mit beständiger Umwendung des Zirkels, so würde bey jeder Umwendung desselben, oder bey jedem Theile AB, BC u. s. w. ein kleiner Fehler begangen, alle diese Fehler würden sich häufen, und am Ende eine große Unrichtigkeit verursachen, so daß sich der letzte Theil selten bey G endigen würde, wo die ganze Linie zu Ende ist. Um also dies zu verhüten, verfährt man richtiger auf folgende Art: Man trägt von A bis B erst 144 Theile, dann von A bis C, 2. 144 oder 288 Theile, von A bis D, 3. 144 oder 432 Theile u. s. w. so kommen endlich von A bis G, 6. 144, oder 864 Theile, und indem solchergestalt, immer aus einem Punkt A aufgetragen wird, so können sich die Fehler nicht häufen, und die Linie AG wird auf diese Art weit richtiger getheilt werden. Eben dieses ist die Ursache, warum in (III) die Theile 13, 14, 20 nicht nach der Ordnung von A bis b, von b bis c, von c bis d aufgetragen, sondern von A bis b erst 13, dann von A bis c, 27, und endlich von A bis d, 47 Theile abgesetzt wurden.

VIII) Die Methode (VII) eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, ist in der Ausübung weit bequemer, als die gewöhnliche Euclidische Methode, die in der

Ele-

Elementargeometrie vorkömmt (*). Auch ist sie nicht leicht den Fehlern unterworfen, die bey Ausübung der Euclidischen Methode vorfallen können, wenn man die dabey erforderlichen Parallellinien nicht sehr genau zieht. Indessen ist aber auch die leztere oft von großen Nutzen, wenn man z. E. keinen verjüngten Maaßstab bey der Hand hat, oder auch eine Linie nicht in sehr viele Theile eintheilen soll.

IX) Die practischen Feldmesser theilen besonders kleine Linien, auch oft nur blos durchs Augenmaaß oder durch Versuche. Dieses geht besonders dann desto bequemer von statten, wenn die Anzahl der Theile sich in Factoren zerfällen läßt. Soll z. B. eine Linie in 15 gleiche Theile getheilt werden, so theilt man sie erst in 3, und dann jedes Drittel in 5 Theile.

Um hierbey nicht nöthig zu haben, diese kleinen Theile selbst zwischen die Zirkelspitzen zu fassen, und der Ordnung nach abzusetzen, so kann man noch besser auch so verfahren.

Gesetzt man solle AB (Fig. LXXXV. Tab. VII.) in $15 = 3 \cdot 5$ Theile abtheilen, so theile man durch Versuche AB in e und k erstlich in 3 gleiche Theile $Bk = ke = eA$. Hierauf nicht

(*) S. Kästners Anf. d. Geom. u. Arith. Gött. 1774. das. Geom. 29. Satz.

nicht einen solchen Theil wie vorhin in 5 kleinere, sondern vielmehr die ganze Länge AB in 5 gleiche Theile Bm = mi = if = fc = cA. Mit dieser Oefnung des Zirkels lassen sich nun aus den bereits bestimmten Punkten k und e, wieder die erhaltenen Fünftel von AB aus k in n, aus k in g, dann aus e in h und aus e in b, hierauf ferner aus h in l, und aus g in d, aus d in a und endlich aus l in o abtragen, so hat man alle einzelnen 15 Theilpunkte von AB, ohne kleinere Theile zwischen den Zirkelspitzen gehabt zu haben, als die Drittel und Fünftel von AB.

Man sieht leicht wie eben diese Methode auf andere Zahlen, die sich in Factoren zerfällen lassen, angewandt werden kann.

Der Vortheil dieser Eintheilungsmethode ist, daß man erstlich der Unbequemlichkeit ausweicht die einzeln kleinen Theile Bo, on, om rc. selbst zwischen die Zirkelspitzen zu fassen, und durch Versuche zu bestimmen, und dann zweitens die Fehler vermeidet, welche durch das unmittelbare Absetzen so kleiner Theile selbst, begangen werden können.

Bey Eintheilung der Kreisbogen z. B. §. 89. X. kann dieselbe Methode mit Vortheil angewandt werden.

X) Wenn

X) Wenn man vermittelst des tausendtheilichten Maaßstabes ein paar Linien aufs Papier absetzen wollte, deren Verhältniß irrational wäre, z. E. wie $\sqrt{7} : \sqrt{5}$, so muß man das vorgegebene Verhältniß erstlich beynahe durch ein rationales ausdrücken. Dieß geschieht, wenn man die Wurzeln würklich auszieht, und dann das Verhältniß der herauskommenden Werthe in ganzen Zahlen, von dem Maaßstabe abträgt.

Z. E. $\sqrt{7} = 2,64$ beynahe
$\sqrt{5} = 2,23$ beynahe
also beynahe $\sqrt{7} : \sqrt{5} = 2,64 : 2,23 = 264 : 223.$

Man nimmt also nur das Verhältniß der ganzen Zahlen 264 : 223 von dem Maaßstabe ab, so wird man ein paar Linien erhalten, die beynahe das irrationale Verhältniß $\sqrt{7} : \sqrt{5}$ unter einander haben.

XI) Wegen der Ausziehung der Wurzeln, die man vorher bewerkstelligen muß, ist dieses Verfahren etwas unbequem. Lassen sich aber die Zahlen unter dem Wurzelzeichen in Factoren zerfällen, so läßt sich die Aufgabe bequemer durch folgende geometrische Methode auflösen.

Gesetzt: das Irrationalverhältniß sey folgendes:

$\sqrt{68575} : \sqrt{14124}$

Hier ist nun,

$68575 = 325 \cdot 211$
$14124 = 428 \cdot 33.$

Man trage also (Fig. XXXVIII) auf eine gerade Linie von A bis C, 325 Theile des tausendtheilichten Maaßstabes, von A bis B, 325 + 211 oder 536 Theile, so wird CB = 211 Theilen. Man halbire AB in P, und beschreibe über AB einen Halbkreis ADB; durch C errichte man ein Perpendikel CD, so ist CD = $\sqrt{68575}$.

Bew. Denn CD ist die mittlere Proportionallinie zwischen AC und CB, folglich

AC : CD = CD : CB oder
325 : CD = CD : 211 mithin
325 . 211 = CD^2 also
CD = $\sqrt{325 \cdot 211} = \sqrt{68575}$.

Völlig auf eben die Art findet man $\sqrt{14124}$, wenn man Ac = 428, Ab = 428 + 33 = 461 Theilen nimmt, über Ab einen Halbkreis Adb beschreibt, und durch c das Perpendikel cd setzt: dann wird wie vorhin cd = $\sqrt{14124}$; So sind also die Perpendikel CD, cd, die Linien, die das Irrationalverhältniß $\sqrt{68575} : \sqrt{14124}$ unter einander haben.

XII) Um dergleichen Zahlen unter dem Wurzelzeichen in ihre Factores zu zerfällen, kann man sich mit Vortheil solcher Tafeln bedienen, aus denen man sogleich, ohne weitere Rechnung, die Factores herausnehmen kann. Eine solche Tafel, nebst ihrem Gebrauche, findet man in Lamberts Beyträgen zur Ma-

thematik II. Th. S. 52 bis auf die Zahl 10200, in Poetii Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft, bis auf 10000, und in den logarithmischen, trigonometrischen und andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln von Georg Vega (Wien 1797) bis auf die Zahl 10500.

XIII) Endlich, wenn die Linien, die von dem verjüngten Maaßstabe, in den bisherigen Aufgaben abgetragen, oder auf ihm gemessen werden sollen, größer sind, als der Maaßstab, so muß man sie in Theile zerlegen, und die Größe eines jeden einzeln Theiles abtragen.

Aufgabe.

§. 70. Die krumme Linie auf dem Felde (Fig XXII) für die man in (§. 55. 20) die Abmessungen hat, aufs Papier zu tragen, und daselbst eine zu verzeichnen, die ihr, so viel als möglich, ähnlich sey.

Aufl. I) Man zieht auf dem Papiere willkührlich eine gerade Linie; auf diese trage man nach dem verjüngten Maaßstabe, die in §. 55. 20 gefundenen Maaße für die Abscissen.

II) Diese Maaßen werden aber alle von einem Punkte angerechnet, welcher auf d—

Papiere eben so, wie auf dem Felde, der Anfangspunkt der Abscissen ist.

III) Hat man nun solchergestalt, nach der Ordnung, aus dem Manuale alle Abscissen aufgetragen, so richtet man durch alle Endpunkte der Abscissen, Perpendiculärlinien auf. §. 63.

IV) Auf diese setzt man die jeder Abscisse zugehörige Ordinate und je nachdem die Zeichen + — angegeben sind, werden die Maaße der Ordinaten rechter oder linker Hand der Abscissenlinie, auf die Perpendikel getragen.

V) Ist man hiemit fertig, so zieht man durch die Endpunkte der aufgetragenen Ordinaten, aus freyer Hand eine zusammenhängende krumme Linie. Diese wird nun der auf dem Felde beynahe ähnlich seyn; besonders wenn man auch zu gleicher Zeit während der Verzeichnung darauf siehet, wo nach Angabe des Manuals, die krumme Linie hohl oder erhaben gegen die Abscissenlinie ist. Aus §. 54. [12]. und §. 55. [19].

Anmerkung.

§. 71. Die Abscissenlinie und Ordinaten kann man erst mit Bleystift, die krumme Linie selbst aber mit einer fein geschnittenen, in Tusche eingesenkten Rabenfeder ausziehen, und alsdann, die mit dem Bleystift gezogenen Linien, mit

mit weissem Brod oder elastischem Harz wieder wegreiben.

Branders System von Maaßstäben.

§. 72. 1. Die schickliche Größe eines verjüngten Maaßstabes zu irgend einem Entwurfe oder Grundrisse in der practischen Geometrie, richtet sich überhaupt nach diesen oder jenen Absichten, die man durch den Grundriß der Figur erreichen will; Sollen auch sehr kleine Theile einer Figur noch unterschieden werden können, so muß man einen Maaßstab annehmen, der eine zu diesem Zweck erforderliche Größe hat.

Ist ferner der Raum oder die Größe des Papiers gegeben, worauf man eine Figur, aus ihren Messungen auf dem Felde entwerfen will, und soll solche, so viel als möglich, den Raum des Papiers einnehmen, so hat es oft Schwierigkeit, die eigentlich hierzu erforderliche Größe der Theile auf dem verjüngten Maaßstabe zu bestimmen. Denn nähme man den Maaßstab, oder die Theile auf ihm, zu groß an, so würde die abzutragende Figur, vielleicht gar nicht auf die vorgegebene Größe des Papiers passen. Nähme man sie zu klein an, so würden Theile der Figur undeutlich ausfallen, die man doch noch gern unterscheiden will.

2. Um nun mit der Bestimmung der in jedem Falle erforderlichen Größe des Maaßstabes keine Zeit zu verderben, so werden in der Branderischen (nunmehr Höschelischen) Offiein in Augspurg, besonders hierzu eingerichtete Systeme von Maaßstäben verfertiget, unter welchen man sogleich denjenigen auswählen kann, der zu einer gewissen Absicht am schicklichsten ist.

3. Bey der Einrichtung eines solchen Systems hat Brander folgendes zum Grunde gelegt:

Erstlich sollen die Maaßstäbe, oder vielmehr ähnliche Theile auf ihnen, in einer geometrischen Progression fortgehen, aber so, daß ein Theil, z. E. eine Ruthe auf dem eilften Maaßstabe, nur erst ohngefähr 10 mahl größer werde, als ein ähnlicher Theil auf dem ersten Maaßstabe. — Also muß der 11te Maaßstab 10 mahl so groß seyn, als der erste.

Zweytens, werden alle diese Maaßstäbe auf eine ähnliche Art eingetheilt, damit die Theile auf ihnen stuffenweise immer grösser werden, doch so, daß

Drittens, ähnliche Theile auf zwey nächst aufeinander folgenden Maaßstäben nicht zu sehr verschieden ausfallen.

4. Es sey also die Länge des ersten Maaßstabes $= a$, des eilften $= l$: So werden zwischen a und l, 9 mittlere geometrische Proportionallinien b, c, d, e, f, g, h, i, k, gesucht, auf die nachher die Abtheilungen verzeichnet werden. Dieses geschiehet so:

5. Weil a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l in einer geometrischen Progression stehen sollen, so ist das Verhältniß l:a zehnmahl so groß, als das Verhältniß b : a, mithin nach den Regeln der Zusammensetzung der Verhältnisse. (Kästn. Arith. VI. Kap. 4. Zus.)

$$l : a = b^{10} : a^{10}$$

$$\text{daher } b^{10} = \frac{a^{10} \cdot l}{a} = a^9 \cdot l$$

Nun soll aber $l = 10 \cdot a$ seyn (3) also wird $b^{10} = 10 \cdot a^{10}$. Mithin $b = a \cdot \sqrt[10]{10}$, und $\log b = \log a + \frac{1}{10} \log 10 = \log a + 0{,}1000000$

6. Ferner ist $a : b = b : c$; $b : c = c : d$ u. s. w.

$$\text{folglich } c = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 \sqrt[10]{100}}{a} = a \sqrt[10]{100};$$

daher $\log c = \log a + \frac{1}{10} \log 100 = \log a + 0{,}2000000$;

$d = \frac{c^2}{b} = a \sqrt[10]{1000}$ daher $\log d = \log a + \frac{1}{10} \log 1000 = \log a + 0{,}3000000$ u. s. w.

7. Nun macht Hr. Br. den kleinsten Maaßstab a = 100 Pariserlinien, und theilt jede Linie wieder in 10 Theile. Also ist in solchen Theilen a = 1000; und log a = 3.

8. Daher werden die Logarithmen von a, b, c, d u. s. w. nebst den zugehörigen Werthen von a, b, c, d u. s. w. folgende

log a = 3,000000;	folglich	a =	1000,000
log b = 3,100000;	—	b =	1257,925
log c = 3,200000;	—	c =	1584,893
log d = 3,300000;	—	d =	1995,262
log e = 3,400000;	—	e =	2511,886
log f = 3,500000;	—	f =	3162,278
log g = 3,600000;	—	g =	3980,072
log h = 3,700000;	—	h =	5011,872
log i = 3,800000;	—	i =	6309,574
log k = 3,900000;	—	k =	7943,284
log l = 4,000000;	—	l =	10000,000

9. So zeigen also die für b, c, d u. s. w. gefundenen Werthe, wie viel von denen Theilen, deren a, 1000 hält (7) zu der Länge eines jeden nächstfolgenden Maaßstabes genommen werden müssen.

10. Jede solche Länge wird nun für sich in 1000 Theile getheilt, und so erhält Hr. Br. 1000theiligte Maaßstäbe a, b, c u. s. w. deren ganze Längen sowohl, als auch ähnliche Theile auf

auf ihnen, sich wie die für a, b, c u. s. w. gefundenen Werthe (8) verhalten.

11. Da nun z. E. a : b = 1000 : 1257, 925 = 31 : 39 ist, so erhellet, daß die Länge eines gewissen Maaßstabes sich verhält zu der Länge des nächstfolgenden, wie 31 : 39; und eben so verhalten sich überhaupt ähnliche Theile, die z. E. auf beyden nächstaufeinander folgenden Maaßstäben, Ruthen bedeuten, gegeneinander.

Es wachsen also die Maaßstäbe und ähnliche Theile auf ihnen, nicht sehr schnell: Wenn daher ein gewisser Maaßstab, zu einer Figur, die man auf dem Papiere entwerfen wollte, etwas zu groß wäre, so könnte man stuffenweise einen von den nächst kleinern nehmen, ohne sich der Gefahr auszusetzen, einen auszuwählen, wodurch die aufzutragende Figur plötzlich zu klein ausfiele.

12. Die Art, wie nun der zu einer Figur schickliche Maaßstab gefunden wird, ist diese:

Gesetzt, es sey auf dem Felde ein Dreyeck gemessen worden, dessen längste Seite = 5° 3′ 4″ sey. Damit nun diese längste Seite, und folglich auch das ganze Dreyeck verjüngt, z. E. auf ein vorgegebenes Quartblatt Papier, aufgetragen werden könne, und daselbst eine schickliche Größe bekomme, so nehme man auf dem Pa-

piere eine gewisse Länge an, so groß man nämlich die längste Seite des Dreyecks haben will; diese Weite fasse man mit dem Zirkel, und untersuche, auf welchem der Maaßstäbe a, b, c u. s. w. diese Weite 534 Theile, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, 5° 3′ 4″ beträgt, oder dieser Größe am nächsten kömmt, so hat man den Maaßstab gefunden, nach welchem die Figur aufgetragen werden muß. Man nehme alsdann die 534 Theile von dem gefundenen Maaßstabe völlig genau ab, setze diese Weite aufs Papier, und beschreibe über ihr das vorgegebene Dreyeck.

13. Mehrere Beyspiele findet man in Branders Abhandlung selbst. Man s. dessen Beschreibung eines Systems von Maaßstäben Augsb. 1772. §. 12. u. s. w.

14. Eine solche Reihe von Maaßstäben kann demnach in der ausübenden Mathematik von sehr großen Nutzen seyn, indem man dadurch viele Mühe erspart, die man sonst auf die Auswahl eines geschickten Maaßstabes und dessen Zeichnung verwenden müßte. Wer sich nicht selbst die Mühe geben will, nach der bisherigen Anleitung, eine solche Reihe von Maaßstäben zu verfertigen, kann solche in obgedachter Officin auf Messing oder Glas in sehr großer Vollkommenheit erhalten.

Uebri=

Uebrigens erhellet, daß man sich zu dem Zwecke (1) auch sonst eine Reihe von Maaßstäben zeichnen könnte, wenn sie auch gleich eben nicht genau nach einer geometrischen Progression fortgehen. Es kömmt nur darauf an, daß die Unterschiede jeder zwey aufeinander folgenden nicht zu groß ausfalle.

Der Nonius oder Vernier.

§. 73. Es sey (Fig. XXXIX. Tab. III.) AR eine gerade Linie, auf der sich lauter gleiche Theile, z. E. in beystehender Figur, 14 gleiche Stücke befinden.

II) Nun nehme man eine gewisse Anzahl von diesen Theilen, z. E. die Weite mc, welche 9 von diesen Theilen hält, trage solche auf eine andere gerade Linie von M nach D; dergestalt daß $MD = mc$ sey; und theile nun diese Länge MD in 8 gleiche Stücke $ML = LK = KI$ u. s. w. nämlich in einen Theil weniger, als vorher auf mc; so erhellet, daß die Theile auf MD größer seyn werden, als die auf mc. Es ist nämlich $ML = \frac{1}{8} MD = \frac{1}{8} mc$; aber ml ist $= \frac{1}{9} mc$, mithin $ML > ml$.

III) Man nenne einen Theil auf $MD = a$; einen Theil auf mc oder AR, $= b$, und die angenommene Größe mc oder

$$MD = L; \text{ So ist } ML = a = \frac{1}{8} L$$
$$ml = b = \frac{1}{9} L$$

Mithin der Unterschied ML — ml = a — b = $\frac{1}{8}$ L — $\frac{1}{9}$ L = $\frac{1}{72}$ L oder weil auch, 8 a = 9 b, und folglich a = $\frac{9}{8}$ b ist, so wird auch a — b = $\frac{9}{8}$ b — b = $\frac{1}{8}$ b.

IV) Es ist also ein Theil ML der eingetheilten Linie MD, um den 72ten Theil der ganzen Länge MD größer, als ein Theil ml auf der zuerst eingetheilten Größe mc: oder es ist auch das Stück ML größer als ml, um den 8ten Theil von ml.

V) Nähme man also z. E. ML, und trüge sie von m nach r, so wäre das Stückchen rl der 72te Theil von mc, oder der 8te Theil von ml oder kl.

VI) Ferner ist

$$\begin{aligned} MK - mk &= 2a - 2b = 2(a-b) = \tfrac{2}{8}b \text{ (III)} \\ MI - mi &= 3a - 3b = 3(a-b) = \tfrac{3}{8}b \\ MH - mh &= 4a - 4b = 4(a-b) = \tfrac{4}{8}b \end{aligned}$$

u. s. w.

VII) Man stelle sich also vor, die Linie MD werde auf mc gelegt, so daß M auf m, und folglich D auf c zu liegen komme, so wird der Theilpunkt L linker Hand l, auf r fallen, und L wird von l um $\frac{1}{8}$ b abstehen. Ferner wird der Theilstrich K linker Hand k zu liegen kommen, und beyde Theilstriche K, k werden um $\frac{2}{8}$ b von einander abstehen. I wird von i um $\frac{3}{8}$ b entfernt seyn u. s. w.

VIII)

VIII) Ich werde nun, um die eingetheilten Linien AR, DM von einander zu unterscheiden, künftig AR einen eingetheilten Rand, MD aber einen Vernier oder Nonius nennen. Die Ursache dieser Benennungen soll unten erklärt werden.

Den Punkt oder Strich M, wo sich auf dem Vernier die Theile anfangen, werde ich in der Folge den Index oder den Anfangsstrich nennen. Die Theilsteiche L, K, I u. s. w. die auf dem Vernier den ersten, zweyten, dritten u. s. Theil endigen, sollen nach der Ordnung der erste, zweyte, dritte u. s. Theilstrich heißen.

Dieses zum vorausgesetzt nehme man an, man könnte den Vernier MD längs des eingetheilten Randes AR fortschieben, so aber, daß beyde Linien MD, AR immer genau an einander lägen (wie wenn z. B. die Abtheilungen ML, KL u. s. w. sich auf dem Rande eines dünnen Linials MD befänden, welches man an die Linie AR anlegte, und längs ihr fortbewegte) so wird aus dem bisherigen folgendes erhellen. Wenn man den Vernier MD so an den eingetheilten Rand AR anlegt, daß dessen Index M genau an einen gewissen Theilstrich m des Randes RA passet, (wie in VII) so liegen bey dieser ersten Lage des Vernier überhaupt die Theilstriche desselben, L, K, I

s. w. insgesammt linker Hand derjenigen Theilstriche der eingetheilten Größe mc, die mit denen des Vernier einerley Zahl haben, das heißt; L wird von l um $\frac{1}{8}$ b, K von k um $\frac{2}{8}$ b u. s. w. abstehen.

Schiebt man also den V. DM von der linken Hand gegen die rechte, längs AR fort, bis der erste Theilstrich L des V. an den ersten Theilstrich l der angenommenen Größe mc zu liegen kömmt, so rückt der Index M vorwärts nach R zu, und entfernt sich von m um $\frac{1}{8}$ b. Und so rückt derselbe nach der Ordnung um $\frac{2}{8}$ b, $\frac{3}{8}$ b u. s. w. vorwärts, so wie nach und nach bey dem Fortschieben des V. die Theilstriche, K, I, H u. s. w. an die ähnlichen Theilstriche, k, i, h u. s. w. der eingetheilten Größe mc, zu liegen kommen.

IX) Dieses giebt ein Mittel, zu erfahren, um wie viel ein Punkt μ, der z. E. zwischen zwey Theilstrichen m und n angenommen wird, von dem nächsten Theilstriche m linker Hand, absteht. Man schiebe den V. fort, bis dessen Index M genau an μ zu liegen kömmt; Dann untersuche man, welcher Theilstrich des V. mit einem gewissen Theilstriche der eingetheilten Größe mc zusammentrifft; gesetzt, der 5te Theilstrich G, passe alsdann genau an den eben so vielten Theilstrich g, der eingetheilten Größe mc, so wird nach VIII der Index M oder der

Punkt

Punkt μ, genau um $\frac{3}{8}$ b von m abstehen, oder es wird das Stückchen $m\mu = \frac{3}{8}$ b seyn müssen; und die Weite $A\mu$ würde hier auf dem eingetheilten Rande $= 11\,b + \frac{3}{8}\,b$ seyn.

X) Es kann aber geschehen, wie Fig. XI. ausweiset, daß kein Theilstrich des V. mit einem Theilstriche des Randes zusammenpaßt. Es erhellet, wenn der dritte Theilstrich I des V. MD, mit dem eben so vielten Theilstrich i der Länge mc, zusammen passete, daß alsdann völlig genau das Stück $m\mu = \frac{3}{8}$ b seyn müßte. Nun stehet aber I etwas rechter Hand über i hinaus, also muß offenbar $m\mu$ etwas größer als $\frac{3}{8}$ b seyn. Es kann aber nicht $= \frac{4}{8}$ b seyn, weil sonst die Theilstriche H, h, zusammen passen müßten, welches nicht angenommen wird. Es ist also $m\mu > \frac{3}{8}$ b aber $< \frac{4}{8}$ b, und daher zwischen zweyen Gränzen enthalten, die nur um $\frac{1}{8}$ b, von einander unterschieden sind. Das Stückchen Ii, auf dem Rande, ist aber eigentlich der Werth, um wie viel $m\mu$ größer als $\frac{3}{8}$ b ist. Um also Ii zu finden, überlege man folgendes.

Weil $HI - hi = \frac{1}{8}$ b, und die Summe der beyden Stückchen Ii + Hh, dem nur genannten Unterschiede HI — hi, gleich ist, so wird Ii + Hh, $= \frac{1}{8}$ b. Man schätze nun nach dem Augenmaaße, was die beyden benachbarten Stückchen Ii, Hh für ein Verhältniß gegen einander haben; Gesetzt,

man habe gefunden Ii : Hh = n : m, also Hh = $\frac{m}{n}$ Ii; so wird Ii + $\frac{m}{n}$ Ii oder $\frac{n+m}{n}$ Ii = $\frac{1}{8}$ b

mithin $Ii = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{1}{8}$ b.

je genauer man also sich auf das Augenmaaß verlassen kann, desto zuverlässiger wird man dem wahren Werthe von Ii nahe kommen.

Ex. Ich will annehmen, man habe Hh etwa = $\frac{1}{3}$ Ii geschätzt, so wäre m = 1, n = 3, also Ii = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8}$ b = $\frac{3}{32}$ b, folglich das Stück $m\mu$ = $\frac{3}{8}$ b + $\frac{3}{32}$ b, und die Weite $A\mu$ auf dem Rande = 11 b + $\frac{3}{8}$ b + $\frac{3}{32}$ b.

XI) Ich habe bisher bloß der Deutlichkeit wegen angenommen, daß die Länge des Vernier 9 Theilen des Randes gleich sey, und diese Länge des V. in 8 gleiche Stücke zertheilet worden. Hierdurch wurde jeder Theil des Vernier um $\frac{1}{8}$ b größer, als jeder Theil des Randes (III) und wir fanden dadurch sehr bequem Achttheilchen von den gleichen Stücken auf dem Rande (VI). Man kann aber die bisherigen Betrachtungen leicht allgemein machen. Man darf sich nur statt der bisherigen Zahl 9 jede andere vorstellen. Gesetzt, es fasse überhaupt der Vernier r Theile des Randes, oder die Länge des V. sey = r. b, und diese werde in r — 1 Theile getheilet, so wird ein Theil des

V.

V. um $\frac{1}{r-1}$ b größer seyn, als ein Theil des Randes, wo also r überhaupt dasjenige bedeutet, was in den bisherigen Schlüssen (I — X) die Zahl 9 war.

Ferner seyen auf dem Rande von A bis m überhaupt x Theile, jeder = b, und für das Stückchen mμ, welches kleiner als ein b ist, treffe der yte Theilstrich des angelegten Vernier DM, an einen Theilstrich des Randes, so wird überhaupt die Weite

$$A\mu = xb + \frac{y}{r-1}.b$$

So war z. E. für (X) x = 11; y = 3.

Passet endlich kein Theilstrich des V. genau an einen Theilstrich des Randes, so wird

$$A\mu = xb + \frac{y}{r-1}.b + \frac{n}{m+n}.\frac{1}{r-1}b$$

wo m, n, wieder die Zahlen bedeuten, die in solchem Falle, nach der gegebenen Anleitung (X) von dem Augenmaaße abhängen.

Anmerkung.

§. 74. Die bisherige Methode, kleine Theile einer Linie anzugeben, wird gewöhnlich dem Peter Nunnez, oder Nonius, wie

 man

man ihn zu nennen pflegt, zugeeignet. Man nennet daher die längs dem eingetheilten Rande bewegliche Linie DM auch einen Nonium. Nunnez war ein Portugiese, und Prof. der Mathematik zu Koimbra. (geb. 1492. zu Alçazar del Sal.)

Hr Hofr. Kästner eignet in seinen vortrefflichen astronom. Abhandl. (zweite Samml. 5te Abhandl. p. 180.) diese Erfindung vielmehr einem Deutschen, Namens P. Vernier, oder Werner zu, und dieses giebt die Ursache der Benennung §. 73. VIII. Man kann in der angeführten Schrift die Geschichte dieser Erfindnng weiter nachlesen, auf welche ich also meine Leser verweise. Noch mehr litterärische Nachrichten vom Nonius oder Vernier s. m. auch in Kästners geometrischen Abhandlungen (II. Sammlung, Göttingen 1791. 38te Abh.

Anwendung des Bisherigen.

§. 75. Gesetzt, auf dem Rande AR habe man von A nach R Zolle abgetragen, und jeder Zoll sey in 10 Linien getheilt, dergestalt, daß also das bisherige b = $\frac{1}{10}$ Zoll = 1 Linie sey. Nun mache man einen Vernier DM, dessen Länge = 101 . b sey, und diesen Vernier theile man in 100 gleiche Theile, so ist ein Theil auf dem Vernier = $\frac{101}{100}$. b = b + $\frac{1}{100}$ b,

mit-

mithin um $\frac{1}{100}$ b oder um $\frac{1}{1000}$ Zoll grösser, als ein Theil des Randes; und so kann man vermittelst dieses V. sehr bequem den Zoll in 1000 Theile, folglich den Fuss in 10000 Theile eintheilen.

Anmerkung (zu §. 62. 16).

§. 76. 1. Gesetzt, in Fig. XXXII sey auf dem längern Schenkel BC eine gewisse Anzahl von Zollen abgetragen, und jeder Zoll sey in 10 Linien getheilt, dergestalt, daß also die gleichen Theile auf dem Rande BC, Linien bedeuten. Auf dem Schenkel DE des längs BC beweglichen Dreyecks DEF, sey ein Vernier, gezeichnet, dessen Länge = 11 Linien in 10 gleiche Theile getheilet sey, so wird ein Theil auf dem Vernier = $\frac{11}{10}$ b = b + $\frac{1}{10}$ b also hier um $\frac{1}{10}$ b, oder (wegen b = 1 Linie) um 1 Scrupel grösser, als ein Theil des Randes BC. Mithin wird man leicht begreifen, wie sich durch diese Vorrichtung längs EF Parallellinien ziehen lassen, die in einer beliebigen Weite von einander abstehen.

2. Nähmlich die Zahlen, die sich auf die Theile des Vernier beziehen, werden nach entgegengesetzter Richtung auf den Vernier von E gegen D hingesetzt; bey x befinde sich der Index des Vernier.

3. Gesetzt nun, man sollte ein paar Parallellinien ziehen, die z. E. um 8 Linien 4 Scrupel, mithin nach der bisherigen Bezeichnung um $8\,b + \frac{4}{10}\,b$ von einander abstånden.

4. So lege man den Schenkel DE so an BC, daß der Index des Vernier genau an einen gewissen Theilstrich des Randes BC passet, und ziehe långs EF eine gerade Linie: Nun schiebe man das Dreyeck DEF von der linken Hand gegen die rechte fort, bis an dem Rande BC, der Index x des Vernier, genau um die in (3) angegebene Grôße $8\,b + \frac{4}{10}\,b$ vorwårts gerůckt ist, und sich also um so viel, von seiner ersten Stelle entfernt hat, so kann man långs EF wieder eine Linie ziehen, welche denn mit ersterer in der gegebenen Weite parallel seyn wird.

5. Auf eben die Art dienet auch der Schenkel AB dem EF als Nonius oder Vernier.

Wie ein Vernier zur Eintheilung der Kreisbôgen und Winkel gebraucht wird.

§. 77. Da dieses mit dem bisherigen sehr genau zusammen hångt, so ist hier der bequemste Ort davon zu handeln.

I) Es sey Fig. XLI, AR ein aus dem Mittelpunkte C gezogener Kreisbogen, der in

lauter

lauter kleine aber gleich große Theile, z. E. in gewöhnliche Grade getheilt seyn. AR bedeute hier also einen eingetheilten Rand.

II) Nun halte der Bogen oV auf dem Rande überhaupt r solcher gleicher Theile $o\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ u. s. w. oder es sey $oV = r \cdot o\alpha$, und der diesem Bogen oV zugehörige Winkel VCo am Mittelpunkte heiße α: so wird, wenn man sich durch die Theilpunkte α, β, γ u. s. w. Linien nach dem Mittelpunkte C gezogen vorstellt, dadurch der Winkel $oCV = \alpha$ in r gleiche Theile getheilt.

III) DM sey ein anderer Kreisbogen, aus eben dem Mittelpunkte C, mit einem Halbmesser CM beschrieben, der hier etwas kleiner ist, als der Halbmesser Co des Randes: So ist der Bogen DM mit dem eingetheilten Rande concentrisch, und gehört hier eben dem Winkel VCo am Mittelpunkte, zu.

IV) Auch die nach C zulaufenden Theilstriche des Randes, $\alpha 1$, $\beta 2$, $\gamma 3$ u. s. w. würden den Bogen DM in r gleiche Theile theilen.

V) Nun theile man aber den Bogen DM, bey a, b, c, d u. s. w. in $r - 1$ gleiche Theile, und stelle sich durch die Theilpunkte a, b, c etc. gleichfalls Theilstriche vor, die nach dem Mittelpunkte C zulaufen.

So erhellet folgendes:

Einem Theile, wie oα auf dem Rande, gehört am Mittelpunkte C ein kleiner Winkel αCo zu, welcher der rte Theil des Winkels oCV, also $= \frac{\alpha}{r}$ ist (II).

Aber einem Theile, wie Ma auf dem Bogen MD, gehört am Mittelpunkte C ein Winkel MCa zu, der der r — 1te Theil des Winkels MCD oder oCV also $= \frac{\alpha}{r-1}$ ist.

Der Unterschied der beyden Winkel MCa und oCα ist

$$MCa - oC\alpha = \frac{\alpha}{r-1} - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r(r-1)} =$$

dem kleinen Winkel aC1, den beyde Theilstriche α1 und a, am Mittelpunkte C mit einander machen würden.

Eben so ist der Winkel oC$\beta = \frac{2}{r} \cdot \alpha$; der Winkel MCb $= \frac{2}{r-1} \cdot \alpha$; daher MCb — oC$\beta$ $= \frac{2}{r(r-1)} \cdot \alpha =$ dem kleinen Winkel 2Cb, um den die beyden Theilstriche β2 und b von einander abstehen, u. s. w.

VI) Man nenne den Winkel $o C \alpha$, der einem Theile $o\alpha$ auf dem Rande zugehöret $=$ b, so ist $b = \frac{\alpha}{r}$ (V).

Also der kleine Winkel a C 1, den die ersten beyden Theilstriche α 1 und a mit einander machen $= \frac{b}{r-1}$, der Winkel 2 C b der nächstfolgenden beyden Theilstriche $= 2 \cdot \frac{b}{r-1}$ u. s. w.

VII) Man siehet hieraus, daß die Theilstriche a, b, c u. s. w. des Bogens MD, linker Hand der eben so vielten oder gleichnahmigten Theilstriche α, β, γ des Randes, nach der Ordnung um folgende kleine Winkel

$$\frac{b}{r-1}, \frac{2b}{r-1}, \frac{3b}{r-1}, \frac{4b}{r-1} \text{ u. s. w.}$$

abstehen werden.

VIII) So würde also hier der Bogen MD in Absicht des eingetheilten Randes AR eben das seyn, was Fig. XXXIX die gerade Linie MD in Absicht der AR war. D. h. es würde hier der Bogen MD ein Vernier seyn, und man muß sich hier, eben so wie in §. 73. VIII, einbilden, der Bogen MD könne längs den Abtheilungen des Randes fortgeschoben werden,

so aber, daß MD beständig mit AR concentrisch bliebe.

So wird begreiflich seyn, wie sich vermittelst dieser Einrichtung viel kleinere Winkel angeben lassen, als diejenigen sind, die den Theilen des Randes selbst, am Mittelpunkte C zugehören.

IX) Hätte man daher auf dem Rande z. E. den kleinen Bogen ow, oder den zugehörigen kleinen Winkel wCo am Mittelpunkte, und wollte dessen Größe erfahren, so schiebe man den V. MD von der linken Hand gegen die rechte fort, bis der Index des Vernier, oder der Strich M genau in den Halbmesser Cw zu liegen kömmt, und untersuche hierauf, welcher Theilstrich des Vernier hier linker Hand des Index, mit einem gewissen Theilstriche des Randes in eine gerade Linie fällt, so hat man den kleinen Winkel wCo, um den der Index des V. rechter Hand vom nächsten Theilstriche o des Randes absteht.

X) Ex. Gesetzt, man habe den Rand in einzelne Grade abgetheilt, oder jeder Theil auf dem Rande gehöre am Mittelpunkte einem Grade zu; so ist $b = 1°$. Der Bogen MD des Vernier gehöre am Mittelpunkt C einem Winkel MCD $= \alpha = 31$ Graden zu, so ist $r = 31$.

Folg=

Folglich $\frac{b}{r-1} = \frac{1^{\circ}}{30} = \frac{60'}{30} = 2'$.

D. h. jedem Theile auf dem V. gehöret am Mittelpunkte C ein Winkel zu, der um 2′ größer ist, als der, welcher einem Theile des R. zugehört: Mithin würde bey dieser Einrichtung des Vernier, ein Winkel von 2 zu 2 Min. gemessen. Träfe daher in (IX) der 12te Theilstrich des V. mit einem Theilstriche des Randes zusammen, so würde der kleine Winkel oCw, um den der Index des V. von dem Theilstriche o absteher $= 12 \cdot 2' = 24'$ seyn. Hätte man demnach auf dem Rande von A bis o, 13 Grade, so wäre der Bogen Aow, oder der zugehörige Winkel am Mittelpunkte $= 13^{\circ}\ 24'$.

XI) Träfe übrigens kein Theilstrich des Vernier mit einem Theilstriche des Randes genau zusammen, so wird man doch aus §. 73. XI schon zu beurtheilen wissen, wie in solchen Fällen das Augenmaaß zu gebrauchen ist.

XII) Zweites Ex. Gesetzt, der Rand AR sey von 5 zu 5 Minuten getheilt, es sey also $b = 5' = 300''$. Es frägt sich, wie viel Theile des Randes muß der Vernier fassen (*), wenn ein Theil auf dem Vernier um

15″

(*) Wenn ich mich in der Folge des Ausdrucks bediene, der Vernier fasse so viel Theile des Randes

15″ größer seyn soll, als ein Theil des Randes. Hier wird also r gesucht.

Es soll also (I) die Größe $\frac{h}{r-1}$ oder hier $\frac{300''}{r-1} = 15''$ seyn: Mithin wird $\frac{300}{r-1} = 15$ oder $\frac{20}{r-1} = 1$ folglich $r = 21$. Man muß also den Bogen des V. 21 Theilen des Randes gleich setzen, und solchen alsdann in 20 Theile theilen; so wird man das gesuchte erhalten.

Anmerkung.

§. 78. Da sowohl die Theile des Randes, als auch die des V. gewissen Winkeln am Mittelpunkte zugehören, so erhellet, wie die bisherigen Betrachtungen, bey winkelmessenden Werkzeugen, ihre Anwendung finden. In der Folge werde ich übrigens zeigen, wie man an solchen Werkzeugen die Einrichtung macht, daß man den V. an dem eingetheilten unbeweglichen Rande bequem fortschieben kann. Sonst habe ich hier weiter nichts zu bemerken, als daß die

des, oder sey so viel Theilen des Randes gleich, so verstehe ich darunter die Anzahl der Theile des Randes, welche dem Winkel DCM zukommen, zwischen dessen Schenkeln CD, CM der Vernierbogen enthalten ist.

die Theilstriche des V. sowohl, als die des Randes, genau nach dem Mittelpunkte C zulaufen müssen, wenn man anders bey der Untersuchung, ob zwey Theilstriche zusammen passen, keine Fehler begehen will.

Noch eine andere Einrichtung des Vernier.

§. 79. Man setze, der V. fasse r Theile des Randes, oder dessen Länge sey $= r . b$; Man theile diese Länge in $r + 1$ Theile, so werden hier die Theile des V. kleiner ausfallen, als die des Randes. Es ist nähmlich alsdann ein Theil des V. $= \frac{rb}{r+1}$ und folglich $b - \frac{rb}{r+1} = \frac{b}{r+1}$; oder um die Größe $\frac{b}{r+1}$ übertrifft itzo ein Theil des Randes, einen des Vernier.

Diese zweyte Art von Eintheilung, bey der die Theile des Vernier kleiner ausfallen, als die des Randes, wird auch unterweilen bey Winkelmessern gebraucht, deswegen habe ich hier etwas davon sagen müssen. Den fernern Gebrauch hievon wird man aber leicht verstehen können, da mit einer kleinen Veränderung die Betrachtungen des 73. §. hier ebenfalls ihre Anwendung finden.

Eine Anwendung der Constructionsart des verjüngten Maaßstabes, kleine Theile eines Kreisbogens anzugeben.

§. 80. Da wir hier gerade mit Eintheilung der Kreisbogen beschäftigt sind, so darf das Verfahren, dessen man sich ehemals häufig bediente, Kreisbogen nach Art des verjüngten Maaßstabes (§. 65) abzutheilen, hier um so weniger ganz übergangen werden, als man noch öfters Winkelmesser vorfindet, worauf diese Art der Eintheilung angebracht ist. Denen also zu Gefallen, die ein solches Werkzeug besitzen, und es auch wohl in Ermangelung eines bessern noch zu Vermessungen anwenden, mögen folgende Betrachtungen dienlich seyn:

I) Es sey CFD Fig. XLII ein gegebener Winkel $= \alpha$, und AB, CD ein paar concentrische Kreisbogen, die aus F mit den Halbmessern $FC = R$; $FA = r$ beschrieben worden, so ist der Abstand AC, der Parallelkreise CD, AB, nähmlich $AC = R - r$, welche Größe ich a nennen will.

Nun ziehe man von C nach B die schiefe Linie CB; Ferner sey der Winkel CFN ein Theil von CFD, oder man nehme $CFN = \frac{m}{n} \cdot \alpha$. Man sucht den Punkt K, wo der Halbmesser

FN die schiefe Linie CB durchschneidet; oder wenn der Winkel CFN $= \frac{m}{n}\alpha$ seyn soll, was ist alsdann CK für ein Stück von CB?

II) Um dieses zu finden, fälle man auf FN, von C, B, die Perpendikel CL, BM herab, so ist in den rechtwinklichten Dreyecken CFL, BFM; für den Sinus totus = 1.

$$1 : \sin CFN = CF : CL \text{ oder}$$

$$1 : \sin \frac{m}{n}\alpha = R : CL$$

also $CL = R . \sin \frac{m}{n}\alpha = (r + a) \sin \frac{m}{n}\alpha$.

III) Nun ist ferner der Winkel NFD $= \alpha - \frac{m}{n}\alpha = \frac{n-m}{n}\alpha$; und daher eben wie in II

$$BM = BF . \sin MFB = r . \sin \frac{n-m}{n}\alpha.$$

IV) In den beyden ähnlichen Dreyecken CKL, MKB ist CL : BM = CK : KB oder auch CL + BM : CL = CK + KB : CK also endlich (weil CK + KB = CB)

$CK = \frac{CL}{CL + BM}$. CB. oder aus (II. III)

$$CK = \frac{(r+a)\,\sin\frac{m}{n}\alpha}{(r+a)\,\sin\frac{m}{n}\alpha + r\,\sin\frac{n-m}{n}\alpha} \cdot CB.$$

V) So wäre demnach CK ein solches Stück von CB, als der Bruch andeutet, womit CB multiplicirt ist: Man kann also für jeden Winkel CFN $= \frac{m}{n}\alpha$; das zugehörige Stück CK der schiefen Linie CB berechnen.

VI) Um die in IV gefundene Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, so wollen wir setzen, der Winkel CFD $= \alpha$ sey sehr klein. Z. E. nur $\alpha = 1°$, und man wolle also vermittelst des Stücks CK, den Winkel CFN, oder den $\frac{m}{n}$ Theil eines Grades angeben.

VII) Bey dieser Voraussetzung (VI) kann man nun ohne merklichen Fehler $\sin\frac{m}{n}\alpha = \frac{m}{n}\alpha$; und $\sin\frac{n-m}{n}\alpha = \frac{n-m}{n}\alpha$, oder die Sinus für die Bogen selbst annehmen (Trig. S. VII). Dann wird

CK

$$CK = \frac{(r+a)\frac{m}{n}\alpha . CB}{(r+a)\frac{m}{n}\alpha + r\frac{(n-m)}{n}\alpha}$$

$$= \frac{(r.m + a.m)}{rn + am} . CB = \frac{m + \frac{a}{r}.m}{n + \frac{a}{r}.m} . CB.$$

VIII) Wenn nun zugleich a in Vergleichung mit r sehr klein, folglich auch der Bruch $\frac{a}{r}$ sehr klein ist, so kann man im Zähler und Nenner des Werthes von CK (VII) die Glieder $\frac{a}{r}.m$, weglassen, und dann wird ohne großen Fehler $CK = \frac{m}{n} CB$; Folglich $CK : CB = CFN : CFD$.

IX) Hierauf gründet sich nun das ehemals so häufig angewandte Verfahren von den Gradabtheilungen auf dem Rande eines Winkelmessers noch kleinere Theile zu erhalten. Man gedenke sich Fig. XLIII die parallelen Kreisbogen gf, io, mit ein paar Halbmessern beschrieben, deren Unterschied nicht zu groß gegen einen solchen Halbmesser selbst sey. Die Bögen

gd = de = eh u. s. w. mögen hier Grade bedeuten, so werden, wenn man sich die Halbmesser Fgi, Fdk, Fem, Ffo u. s. w. gezogen gedenkt auch die Bogen ik, km, ml, lo auf dem größern Kreise, Grade bezeichnen und die Maaße der Winkel iFk, kFm u. s. w. am Mittelpunkte seyn. Man ziehe die schiefen Linien id, ke, mh, lf u. s. w, theile id, in so viel gleiche Theile, in so viel man den Grad iFk eintheilen will, und beschreibe durch die Theilpunkte a, b, c mit den Halbmessern Fa, Fb, Fc, eine Reihe concentrischer Kreise, wie die Figur ausweiset, so wird man von jedem Grade wie iFk, kFm u. s. w. kleinere Theile nach Maasgabe der Abtheilungen auf den schiefen Linien id, ke, mh, lf u s. w. auf folgende Art erhalten. In beystehender Figur ist die schiefe Linie id in 4 gleiche Theile getheilet worden, und wegen der gezogenen Parallelkreise wird jede andere schiefe Linie ke, lf, eben so viel gleiche Theile bekommen. Wenn man sich daher z. E. von F nach a eine gerade Linie gezogen vorstellt, so wird der Winkel iFa = $\frac{1}{4}$ iFd; weil ia = $\frac{1}{4}$ id ist; folglich iFa = 15′. Eben so iFb = $\frac{2}{4}$. iFd = 30′ u. s. w.; Man würde also auf diese Art hier jeden Grad von 15 zu 15 Minuten eingetheilt erhalten.

Hätte man daher z. E. den Winkel iFr, wo Fr durch den 3ten Theilpunkt der schiefen Linie

Linie lf durchgehet, so würde dieser Winkel hier $= 3° + 3 \cdot 15' = 3° + 45'$ seyn.

X) Dies ist nun die zu Anfange dieses §es erwähnte Theilungsmethode. Sie gründet sich auf die Voraussetzung, daß die Stückchen auf den schiefen Linien id, ke u. s. w. sich wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte verhalten; dieses findet aber offenbar nur in dem Falle statt, wenn in der Formel für CK (VI) der Bruch $\frac{a}{r}$ sehr klein, folglich die Breite des Randes ig $=$ a mit dem Halbmesser Fg $=$ r verglichen, sehr gering ist. Im entgegengesetzten Falle dürfen die Theile auf den Querlinien id, ke etc. nicht einander gleich seyn, wenn die Winkel iFk, kFe in gleiche Theile getheilet werden sollen.

Es sey also z. B. $\frac{a}{r} = \frac{1}{6}$ oder $a : r = 1 : 6$ also a eben nicht sehr klein in Vergleichung mit r, und man wollte den Grad iFd in 8 gleiche Theile theilen; so ist in der Formel (VII) $n = 8$, und für den ersten Theil $iFa = \frac{1}{8}\, iFd$, wird in (VII) $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$; Mithin CK, oder in Fig. XLIII; $ia = \frac{1 + \frac{1}{6}}{8 + \frac{1}{6}} \cdot id = \frac{7}{49} \cdot id = \frac{1}{7} \cdot id.$

Soll also der Winkel iFa, im diesem Exempel, der 8te Theil von iFd seyn, so darf man nach (VIII. IX) nicht $ia = \frac{1}{8}\,id$ nehmen, sondern es muß hier $ia = \frac{1}{7}\,id$ genommen werden. Soll ferner $iFb = \frac{2}{8}\,iFd$ seyn, so wird, weil jetzt $m = 2$; $n = 8$ ist.

$$ib = \frac{2 + \frac{2}{6}}{8 + \frac{2}{6}} \cdot id = \frac{14}{50}\,id = \frac{7}{25}\,id.$$

also keinesweges $ib = \frac{2}{8}\,id$.

Und so wird denn erhellen, daß hier schon die Theile auf id ziemlich ungleich ausfallen, wenn zu ihnen gleich große Winkel am Mittelpunkte gehören sollen.

XI) Da in Fig. XLII. überhaupt $CK =$

$$\frac{m + \frac{a}{r} \cdot m}{n + \frac{a}{r} \cdot m} \cdot CB$$

ist, so kann man ein: für allemal aus den beyden Seiten $CF = a + r$; $BF = r$; und dem eingeschlossenen Winkel $CFB = \alpha$; die schiefe Linie CB berechnen, und sie folglich in dem Maaße finden, womit man FB ausgemessen hat; daher alsdann auch CK in diesem Maaße bekannt wird.

Ex. Man setze $a = 2$ Zoll, $r = 48$ Zoll; $\alpha = 1°$, so findet sich durch eine leichte Rechnung

CB

CB = 2, 176 Zoll. Sollte man nun für CFK = $\frac{1}{2}$ Gr. das Stück CK der schiefen Linie CB berechnen, so setze man in die Formel, statt $\frac{m}{n}$, den Bruch $\frac{1}{2}$, oder m = 1, n = 2, ferner $\frac{a}{r} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$; dies gäbe dann

$$CK = \frac{1 + \frac{1}{24}}{2 + \frac{1}{24}} \cdot 2,176 \text{ Zoll} = 1,108 \text{ Zoll}.$$

Dieß Ex. befindet sich in Kästners astron. Abh. 2ten Theil pag. 168. Hr. K. findet CL = 1, 109 Zoll.

XII) Wollte man also einen Winkelmesser noch auf die bisher beschriebene Art eintheilen, so würde man weit besser thun, die ungleichen Theile auf einer der schiefen Linien wie BC nach der wahren Formel (XI) zu berechnen, als schlechtweg nach der gewöhnlichen Methode lauter gleiche Theile auf CB zu nehmen, und durch sie die parallelen Kreisbogen zu reissen.

XIII) Man hält den Tycho de Brahe für den ersten, der diese Art, Winkel einzutheilen, gelehrt hat; er hat in der That hier die Construction des verjüngten Maaßstabes nachahmen wollen; wie aus Vergleichung der Figuren XLIII. und XXXV. (B), deutlich zu ersehen ist. Tycho und andere theilen nicht die

schiefe

schiefe Linie id, sondern die Breite des Randes ig, in gleiche Theile; aber auch auf ig, dürfen die Theile nicht gleich groß seyn, wie sich leicht zeigen liesse.

Es wäre indessen immer vortheilhafter, die Theilung auf id, als auf ig zu bewerkstelligen, wenn man von dieser Theilungsart noch Gebrauch machen wollte, weil doch immer id > ig ist, und sich folglich die Theile genauer auf id auftragen lassen.

XIV) Eigentlich müßte die Linie id ein Kreisbogen seyn, wenn auf ihr auch bey einem großen Verhältniß a : r, lauter gleiche Theile (IX), statt finden sollten, und dann hätte diese Theilung des Winkels iFd ihre völlig geometrische Richtigkeit. M. s. Kästners Astr. Abh. II. Th. pag. 171.; dieser Kreisbogen id hat aber seinen Mittelpunkt nicht bey F.

Da es aber ziemlich mühsam ist, dieses Kreises id Mittelpunkt zu finden, um ihn gehörig zu ziehen, so ist dieses die Ursache, warum man für id lieber eine gerade Linie nimmt, und die den Winkeln am Mittelpunkte F zugehörigen Stücke auf id, nach VII, berechnet.

XV) Mehreres hievon lehrt Leupolds Theatrum Machin. Geometr. Cap. 26. §. 410. Er giebt aber nur das practische

Ver-

Verfahren an, die Transversallinien zu ziehen, und lehrt noch andere Eintheilungsmethoden, die aber in der Ausübung eben keinen grossen Nutzen versprechen.

Der Proportionalzirkel.

§. 81. Dieses Werkzeug dienet gleichfalls, Linien in gegebenen Verhältnissen zu theilen, besonders in solchen Fällen, wo nicht die größte Schärfe nöthig ist.

1. Die Einrichtung dieses Instruments, läßt sich aus der XLIV. Fig. beurtheilen.

Daselbst stellen ABCD, CEGF zwey meßingene Lineale vor, welche bey C um ein Gewinde beweglich sind, beynahe auf eben die Art, wie die Schenkel eines gewöhnlichen Handzirkels, dergestalt, daß man die innern Seitenlinien BC, EC, der nurgenannten Liniale, in einen beliebigen Winkel öffnen kann. Das Gewinde muß so gearbeitet seyn, daß bey jeder Oeffnung des Instruments, die beyden Linien BC, EC, sich immer genau in einem und demselben Punkte C durchschneiden. Dieser Punkt C ist der Mittelpunkt einer runden Platte, auf welcher sich in dem Gewinde die Liniale herumdrehen.

Wenn man das Instrument zusammenlegt, so müssen die Oberflächen der Liniale genau in eine

eine einzige Ebene fallen: und wenn man beyde Schenkel BC, FC, in einen gewissen Winkel stellet, so muß sich dieser nicht so leicht wieder verrücken.

Beyde Liniale werden übrigens gleich lang gemacht. Die Diagonallinien CA, CF, oder auch ein paar andere von C ausgehende Linien, theilt man in eine gewisse Anzahl kleiner gleich großer Theile. Hier in der Figur mögen AC, CF, jede etwa in 100 gleiche Theile getheilt seyn. Neben die Theilpunkte werden, wie hier, von 10 zu 10 Theilen, Zahlen beygestochen. Die Theilpunkte, bey denen auf beyden Schenkeln, einerley Zahlen zu stehen kommen, müssen von dem Punkte C gleiche Entfernungen haben.

Diese eingetheilten Diagonallinien nennt man auf dem bisher beschriebenen Proportionalzirkel, die arithmetischen Linien; (Lineae partium aequalium).

2. Zu allerley Absichten befinden sich aber ausserdem gewöhnlich noch verschiedene andere abgetheilte Linien auf diesem Instrumente, wovon man den Gebrauch, so wie überhaupt, die nähere Einrichtung des Proportionalzirkels, weitläuftig in Leupolds Theatro Mach. Geom. Kap. XVI ersehen kann. Auch findet sich daselbst Kap. XXIII ein umständliches

Ver-

Verzeichniß von Schriftstellern, die von dem Proportionalzirkel gehandelt haben.

3. Von der Art, wie obgedachte arithmetische Linien dieses Instruments gebraucht werden, soll folgendes kürzlich einigen Unterricht ertheilen.

Gebrauch des Proportionalzirkels.

I) Eine gerade Linie LM Fig. XLIV in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. E. in 9 gleiche Theile einzutheilen, verfahre man so:

Man fasse die vorgegebene Weite LM mit einem Handzirkel und suche auf dem Schenkel CF des Proportionalzirkels, einen solchen Theilpunkt auf, dessen beygeschriebene Zahl sich mit derjenigen genau dividiren läßt, welche die Menge der Theile ausdrückt, in die man LM theilen soll. Hier wähle man also z. E. den Theilpunkt 90, welche Zahl sich mit 9 genau dividiren läßt, setze in diesen Punkt die Zirkelspitze, und eröfne das Instrument so weit, bis die andere Spitze, auf den eben so vielten Theilpunkt 90 des Schenkels CA hinfällt, dergestalt, daß die Weite zwischen beyden gegen einander überstehenden Theilpunkten 90, 90, genau der vorgegebenen Länge LM gleich sey. In dieser Oefnung lasse man nun das Instru-

ment

ment unverrückt, und fasse mit dem Zirkel die Weite zwischen beyden gegenüberstehenden Theilpunkten, 10, 10, (welche Zahlen den 9ten Theil von 90 ausdrücken) so wird diese Weite von 10 nach 10, dem neunten Theil der zwischen den Theilpunkten 90, 90, enthaltenen Länge LM gleich seyn. Die Weite zwischen den Theilpunkten 20, 20, wird $= \frac{2}{9}$ LM seyn u. s. w.

Der Beweis dieses Verfahrens ist aus der Einrichtung des Instruments offenbar. Denn da gleichnahmigte Theilpunkte, d. h. bey denen auf beyden Schenkeln einerley Zahlen stehen, gleiche Entfernungen von C haben, so sind alle Weiten, z. E. von 10 nach 10, oder 20 nach 20 u. s. w. mit einander parallel, und verhalten sich wie der Theilpunkte 10, 20, u. s. w. Weiten von C. Weil also hier die Weite C 10 der 9te Theil von C 90 ist, so wird auch die Weite von 10 nach 10, der 9te Theil der Weite LM seyn, die zwischen den Theilpunkten 90, 90, enthalten ist, und mit der die Weite 10, 10, parallel läuft.

Eben so, weil C 20 $= \frac{2}{9}$ C 90, so ist auch die Weite von 20 nach 20, $= \frac{2}{9}$ LM u. s. w.

II) Die Linie LM in einem gegebenen Verhältnisse, z. E. wie 25 : 40 zu theilen.

Man

Man addire beyde Zahlen 25 und 40 zusammen, dieß giebt die Zahl 65. Man fasse LM mit dem Zirkel, und trage sie auf das Proportionalinstrument, öfne es so weit, bis die Weite zwischen den Theilpunkten 65, 65, der vorgegebenen Länge LM gleich ist. Dann fasse man, bey unverrückter Oefnung des Instruments, die parallelen Weiten, zwischen den Theilpunkten 25, 25 und 40, 40, trage sie auf LM, so wird LM in dem vorgegebenen Verhältniß 25 : 40 getheilet seyn, wie ebenfalls aus der Natur des Werkzeugs erhellet.

III) Zu drey vorgegebenen Linien, die ich a, b, c nennen will, die 4te Proportionallinie d zu finden.

Um dieses zu leisten, fasse man die Weite a, und trage sie auf den Schenkel CA des Proportionalzirkels, z. E. von C nach 20; Ferner trage man auch die Weite b auf eben den Schenkel CA, z. E. von C nach 50; Hierauf nehme man die Weite c, setze die eine Zirkelspitze in den Theilpunkt 20, wo sich die erste Weite a endigte, und öfne die Liniale CA, CF so weit, bis der Abstand zwischen beyden gegenüberstehenden Theilpunkten 20, 20, genau der Weite c gleich ist; dann wird die Weite zwischen den Theilpunkten 50, 50, die gesuchte 4te Proportionallinie seyn. Denn es verhält sich, nach (I), C 20 zu C 50, wie die Weite

von 20 nach 20; zu der Weite von 50 nach 50. D. h. a : b = c : d.

IV) Es erhellet aus dem bisherigen, wie sich durch Hülfe des Proportionalzirkels noch viel andere Aufgaben auflösen liessen; ich übergehe sie aber hier, weil sich viele davon sicherer nach §. 69 bewerkstelligen lassen. Meine Absicht war nur, die vornehmsten Begriffe von einem Werkzeuge beyzubringen, welches ehemals bey den Feldmessern in so großem Ansehen stand.

V) Gegenwärtig bedient man sich desselben nicht mehr so häufig, weil dessen Gebrauch sehr oft durch die geringe Größe desselben eingeschränkt wird, welche nicht die gehörige Genauigkeit verstattet, sobald die abzutragenden Verhältnisse durch sehr große Zahlen gegeben, oder gar irrational sind. Im Gegentheil lassen sich doch manche Irrationalverhältnisse durch eine leichte geometrische Zeichnung darstellen, wie z. E. in dem obigen Beyspiele §. 69. XI. Ist dann ferner eine Linie, die man eintheilen will, größer, als die Summe der beyden Schenkel CA und CF des Proportionalzirkels, so fällt der Gebrauch desselben ohnehin weg. Wollte man hingegen das Werkzeug sehr groß, z. E. 12 bis 15 Zoll lang machen, (das wäre insbesondere auch nöthig, wenn Verhältnisse sich in sehr kleinen Theilen sollten abtragen lassen) so würden doch die beträchtlichen Kosten, durch

den

den Gebrauch desselben nicht ersetzt. Auch müßte man in diesem Falle mit einem Stangenzirkel versehen seyn, um die Linien auf- und abzutragen, weil ein Handzirkel von gewöhnlicher Größe nicht mehr hinreichen, und die gehörige Genauigkeit verstatten würde. Diese und mehrere Ursachen, und zumahl der weit bequemere Gebrauch des tausendtheilichten Maaßstabes zum Abtragen und Eintheilen der Linien in gegebenen Verhältnissen, sind schuld daß wenigstens zu diesen Aufgaben, der Proportionalzirkel eben nicht mehr gebraucht wird.

Anmerkung.

§. 82. I. Die bisher beschriebene Einrichtung des Proportionalzirkels, mit zweyen um ein Gewinde beweglichen Linialen, hat der berühmte Galiläus, ohngefähr um das Jahr 1610, zuerst bekannt gemacht.

II. Es hat zwar schon vor dem Jahre 1600 Jug. Byrgius ein Werkzeug angegeben, welches ebenfalls zu der Absicht, Linien in gegebenen Verhältnissen zu verzeichnen und abzutheilen, dienen sollte: Allein sein Werkzeug ist darinn von dem Galiläischen verschieden, daß der Kopf oder Zapfen, um den sich die beyden Liniale mit ihren Abtheilungen drehen, veränderlich ist, und sich in Nuthen, längs den Linialen, verschieben läßt, so daß der eine von

den Vertikal-Winkeln, welche die beyden Liniale machen, längere Schenkel, als der andere bekömmt. Diese Einrichtung macht den Gebrauch dieses Instruments sehr wandelbar und unsicher, und das mag wohl mit Ursache seyn, daß es von Galiläi Proportionalzirkel sehr bald verdrängt worden ist. Beschreibungen und Abbildungen davon findet man in Leupolds Theatr. Machin. geom. §. 265. Bions mathem. Werkschule III. B. 1. Kap. S. 82. Galgemeyers Tractat vom Proportionalschregmaaß und Zirkel (Ulm 1615) und Lebrecht Hulsii Tractat von mechanischen Instrumenten (Frankfurt am Mayn, 1600.)

Die besten Schriftsteller, die den mannichfaltigen Gebrauch des Proportionalzirkels lehren, sind Mallet *Geometrie Practique*. De Chales *Geom. Pract. L. 4.* Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, vorzüglich die neue 1781 zu Breslau herausgekommene und vom Hrn. Prof. Scheibel umgearbeitete Ausgabe davon. Nic. Goldmann *tract. de usu proportionarii (Lugd. Bat. 1656) in fol.*

Auch in der Branderischen nunmehr Höschelischen Officin in Augspurg, verfertigt man Proportionalzirkel, zum geometrischen Gebrauche; man hat davon Lamberts Abhand-

handlung: Kurzgefaßte Regeln zu perspektivischen Zeichnungen, vermittelest eines zu deren Ausübung, so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportionalzirkels. Augsburg, 1768.

III) Statt des Proportionalzirkels mit zwey eingetheilteu Schenkeln, ein einziges Linial zu gebrauchen, hat Adrian Metius gewiesen. *Praxis nova geometr. per usum Circini et regulae proportionalis. Franek.* 1623.

IV) Wenn die arithmetischen Linien des Proportionalzirkels nicht, wie in der XLIV Fig. längs den Diagonalen der Liniale, sondern längs den Schärfen derselben CB, CE, selbst, verzeichnet wären, so daß diese arithmetischen Linien, beym Zusammenlegen der Liniale, völlig in eine einzige zusammenfielen, so könnte man durch die Querstückchen von einem Theilpunkte auf CE zum gegenüberstehenden auf CB, bey einer geringen Oefnung beyder Liniale, auch Theilchen von sehr kleinen Größen angeben. Gesetzt, CB, CE seyen in 100 Theile getheilt, und die Liniale so weit geöffnet, daß der Abstand von B nach E nur 1 pariser Linie betrüge, so würde nun z. E. das Querstückchen von 23 nach 23 = $\frac{23}{100}$ einer pariser Linie seyn. Gewöhnlich sind aber auf dem Proportionalzirkel die arithmetischen Linien nicht

län-

längs CB, CE selbst gezeichnet, lassen sich also nicht nahe genug zusammenbringen, daß ihre Endpunkte um jeden ganz geringen Abstand einander genähert, und also auch Theilchen von einer sehr geringen Größe angegeben werden könnten.

V. Je länger übrigens CB und CE sind, und je kleinere Theile sich auf CB und CE selbst schon tragen oder schätzen lassen, desto kleinere Theilchen werden sich auch von derjenigen Größe angeben lassen, welche zwischen B und E enthalten ist.

VI. In Nürnberg bedienen sich die Dratzieher und Instrumentenmacher eines Verfahrens, beynahe wie des bisherigen (IV), um die genaue Dicke, oder die sogenannte Nummer einer Dratsaite zu bestimmen. CB, CE, (Fig. XLVIII*) sind die Schärfen zweyer unter einem sehr kleinen Winkel BCE unter einander fest verbundener, sehr gerader messingener Liniale. Längs diesen Schärfen ist z. E. bey o und o die Stelle bemerkt, wo eine Dratseite von Nro. o, zwischen beyde Schenkel BC, CE, gebracht, genau hinein passen würde. Wäre nun der Raum Co z. E. in 24 gleiche Theile getheilt, so würde eine Saite, welche z. E. genau zwischen die Theilpunkte 3 und 3 passete, wenn man sie in den Winkel BCE hineinbrächte, von Nro. 3. seyn, und so in andern

dern Fällen. Auf eine ähnliche Art, werden durch Unterabtheilungen, Nro. $3\frac{1}{2}$, Nro. $3\frac{1}{4}$ u. s. w. angegeben.

Auf eben dieser Idee beruht Wedgewoods Verfahren, um die Aenderung zu bestimmen, welche Thonwürfel durch die Hitze erfahren. *Phil. Trans.* Vol. 72. for 1788. P. II. art. 19. und des von Lichtenberg und Forster herausgegebenen Götting. Mag. 1782. II. Stück. Man sehe über das bisherige auch Kästners geometrische Abh. I. Sammlung, 38. und 39. Aufsatz.

Ein Verfahren, das Verhältniß zweyer Linien gegen einander zu finden, wenn man keinen verjüngten Maaßstab, oder andere Mittel bey der Hand hat.

§. 83. 1. Gesetzt, man solle Fig. XLV. Tab. III., das Verhältniß der geraden Linien AB : AE finden.

Man trage also die kleinere Linie AB, auf die größere AE so oft es angehet, von A nach B, von B nach C, von C nach D. Dieses gehet hier 3 mahl an, und es bleibt das Stück DE übrig, daher ist hier.

I) $AE = 3 \cdot AB + DE$.

2. Nun fasse man die Weite DE, und trage sie auf AB, so oft es angehet, von A nach b, von b nach c, von c nach d; hier bleibt nun das Stückchen Bd übrig, und es ist

$$\text{II)}\ AB = 3 \,.\, ED + Bd.$$

3. Eben so trägt man das übergebliebene Stück dB auf Ab, so oft man kann, so findet sich Ab oder (2)

$$\text{III)}\ ED = 2 \,.\, Bd + \gamma b.$$

4. und endlich nach eben dem Verfahren, Aβ oder

$$\text{IV)}\ Bd = 2\, b\gamma + y\beta.$$

5. Hier ist das übergebliebene Stückchen yβ schon so klein, daß man es bequem nach dem Augenmaaße mit dem in (3) übergebliebenen Stückchen bγ vergleichen kann. Hier würde ohngefähr

$$\text{V)}\ y\beta = \tfrac{3}{4}\, \gamma b \text{ seyn.}$$

6) Aus den Gleichungen I, II, III, IV, V, die man solchergestalt in (1, 2, 3, 4, 5) erhalten hat, kann man nun durch eine sehr leichte Rechnung, das Verhältniß AB : AE finden. Denn

7) Aus der Gleichung V, den Werth von yβ in die IV substituirt, wird

$Bd = \frac{11}{4} \,.\, b\gamma$. also $b\gamma = \frac{4}{11} \,.\, Bd$ dieß in III substituirt, giebt

ED $= \frac{20}{11}$. Bd also Bd $= \frac{11}{20}$ ED; dieß in II substituirt, giebt AB $= \frac{89}{20}$ ED also ED $= \frac{20}{89}$ AB, dieß in I gesetzt, giebt AE $= \frac{293}{89}$. AB. Daher das gesuchte Verhältniß

AE : AB = 293 : 89.

8. Man siehet aus dem bisherigen Beyspiel leicht das allgemeine dieser Methode. Man sucht nähmlich diese Näherung so weit zu treiben, bis man endlich auf ein so kleines Stückchen, wie $y\beta$, kömmt, welches sich bequem, mit dem nächst vorhergehenden Stückchen yb, nach dem Augenmaaße vergleichen läßt.

9. Die Richtigkeit dieses Verfahrens hängt offenbar von der Sorgfalt ab, mit der man, vermittelst des Zirkels, die Theile auf AE nach einander hinsetzt, und von der Schärfe des Augenmaaßes, bey Schätzung des zuletzt übergebliebenen Stücks.

10. Man kann dieses Verfahren auch zur Ausmessung der Winkel oder Kreisbogen gebrauchen. Gesetzt, die bisherigen Linien AE, AB, seyen ein paar Kreisbogen, die mit einerley Halbmesser beschrieben worden. Der Bogen AE gehöre zu 60°, so wird AB zu $\frac{89}{293}$. 60° oder zu 18° 23′ 30″ gehören, oder so groß würde der Winkel seyn, der diesem Bogen zugehörte. Auf die Secunden, die man in dem Werthe für AB erhält, wird man sich

 aber

aber bey diesem Verfahren wohl schwerlich verlassen können; besonders wenn der Halbmesser dieser Bogen klein ist.

11. Ich habe nicht für undienlich erachtet, hier auch diese Methode beyzubringen: Denn man muß in der Ausübung immer mehrere Auflösungen einer Aufgabe in Bereitschaft haben; und die bisherige kann, in Ermangelung anderer Mittel, gar wohl gebraucht werden.

Hogrevens Vorschlag, Maaßstäbe auf ein dreyeckigtes Prisma zu verzeichnen.

§. 84. Da die Abtragung gerader Linien von dem verjüngten Maaßstabe, immer einige Zeit erfordert, besonders wenn man genau verfahren will, und man sehr leicht auf messingenen Maaßstäben die Zirkelspitzen verdirbt, so räth Hogreve (pract. Anweis. z. topogr. Vermess. eines Landes, §. 26) man solle auf die Seitenflächen eines dreyeckigten Prisma von Holz oder Elfenbein ꝛc. Maaßstäbe verzeichnen, beym Gebrauche die scharfe Kante, auf der die Abtheilungen eingerissen sind, an die vorgegebene gerade Linie anlegen, und so auf ihr, bloß vermittelst einer scharf zugespitzten Nadel, die abzusetzenden Maaße bemerken.

Man kann auf die drey Seitenflächen des Prisma 6 Maaßstäbe von verschiedener Größe ver-

verzeichnen; Innerhalb des dreyeckigten Prisma wird ein Theil mit Bley ausgefüllt, damit das Prisma auf dem Papiere fest liege.

Hogreve versichert, daß dieses Verfahren, Maaße abzutragen, sehr geschwind von statten gehe, und auch die Fehler vermieden würden, die sonst beym Einsetzen der Zirkelspitzen begangen werden könnten.

Einige Anmerkungen über die Zuverlässigkeit beym Abtragen gerader Linien.

§. 85. 1. In der theoretischen Mathematik pflegt man sich den Punkt als die Gränze aller Ausdehnung zu gedenken, und mathematische Punkte haben weder Länge, Breite, noch Dicke. Eine Linie ist bloß die äusserste Gränze einer Fläche, und sie bestehet also bloß in einer Länge, ohne Breite und Dicke. Allein, eine ganz andere Bewandniß hat es mit solchen Punkten und Linien, die in der praktischen Mathematik vorkommen. Die praktischen Punkte, wenn sie in die Sinne fallen sollen, sind selbst kleine Theilchen einer Fläche; und eben so verhält sichs mit den practischen Linien, bey denen ebenfalls eine Länge und Breite in Betrachtung kömmt.

Auf dem Felde werden, nach Maaßgabe der Umstände, oft ganze Flächen und Körper,

z. E. Gränzsteine, Häuser, Bäume, Bergspitzen u. s. w. für Punkte angenommen, und Flüsse, Hecken, Wege u. s. w. als Linien betrachtet. So groß ist also der Unterschied zwischen den theoretischen und practischen Größen.

Auf dem Papiere haben wir Ursache, die practischen Punkte und Linien, dem Bilde der theoretischen, so nahe als möglich zu bringen, d. h. sie so zart zu entwerfen, als es die Werkzeuge zulassen, und die Umstände erfordern.

Wenn wir eine practische Linie auf dem Papiere mit einem Zirkel fassen, und messen wollen, so werden wir dabey allemahl Fehler begehen; theils wegen der Dicke der Zirkelspitzen, die als Punkte angesehen werden, theils wenn der Maaßstab selbst vielleicht nicht ganz zuverlässig ist, und endlich wegen der Unvollkommenheit unserer Augen, die im Sehen ihre Gränzen haben, und practische Punkte auf dem Papiere nicht mehr deutlich erkennen, so bald sie gar zu klein sind, und folglich unter einem zu kleinen Sehewinkel ins Auge fallen.

2. In dem letztern Falle hat man Versuche angestellt, die kleinste mögliche Größe der practischen Punkte zu bestimmen, die man auf dem Papiere mit bloßem Auge noch deutlich unterscheiden kann. — Um hievon nur ohngefähr

eini-

einige Begriffe zu geben, so setze man, auf dem Papiere sey ein kleiner Kreis, z. E. von einer Linie im Durchmesser, beschrieben, und etwa mit einer schwarzen Farbe überstrichen worden. Nun stelle man das Blatt Papier in eine mäßige Erleuchtung, und entferne sich mit dem Auge nach und nach immer weiter, bis der Kreis auf dem Papiere anfängt undeutlich zu werden. Die Entfernung des Auges von dem Papiere, mit dem Durchmesser des Kreises verglichen, giebt die scheinbare Größe, oder den kleinsten Winkel, unter welchem dieser Kreis noch deutlich empfunden werden kann.

3. Nämlich, wenn man den Sinus totus $= 1$ setzet, so wird die Tangente der scheinbaren Größe dieses Kreises herauskommen, wenn man dessen Durchmesser, mit der Entfernung des Auges dividirt. Es sey also die scheinbare Größe $= \varphi$, des Kreises Durchmesser $= a$, die Weite des Auges von dem Kreise, wenn er anfängt undeutlich zu werden, d. h. die Gesichtsferne, oder die Gränze des deutlichen Sehens $= b$, so ist

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{a}{b}$$

weil aber φ immer ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man bloß $\varphi = \frac{a}{b}$ (Trig. S. VII) oder

in Secunden $\varphi = \frac{a}{b} \cdot 206264$ Sec. setzen.

4. Diese scheinbare Größe φ richtet sich offenbar nach der Schärfe der Augen, weil b nicht für jedes Auge einerley seyn kann.

5. So ist R. Smith (Lehrbegr. d. Optik §. 97) bey einem Versuche gegenwärtig gewesen, wo ein guter Freund von ihm, einen schwarzen Kreis auf weißen Papiere, bey dem gewöhnlichen Tageslichte nicht mehr deutlich erkennen konnte, da die Entfernung seines Auges von dem Kreise ohngefähr 5156mahl grösser war, als der Durchmesser desselben. Mithin war für diese Person b = 5156 . a und folglich der kleinste empfindbare Gesichtswinkel

$$\varphi = \frac{206264}{5156} \text{ Sec.} = 40 \text{ Sec.}$$

6. Diese Person hatte sehr gute Augen; weil ihr in einer so großen Entfernung, folglich unter einer so geringen scheinbaren Größe, jener Kreis erst anfieng undeutlich zu werden. Wahrscheinlich muß bey den meisten Menschen der Sehewinkel größer als 40″ seyn, wenn sie ein kleines Object noch deutlich sollen empfinden können.

Man kann annehmen, als ein Mittel aus vielen Erfahrungen, daß von den meisten Men-

Menschen ein Object anfängt undeutlich gesehen zu werden, so bald der Winkel, unter welchem es ins Auge fällt, kleiner als eine Minute, oder 60″ ist. — Indessen giebt es Personen, denen ein Gegenstand noch unkenntlich bleibt, wenn er gleich unter einem Winkel von 2 und mehreren Minuten ins Auge fiele.

7. Es kömmt der Sehewinkel offenbar auch auf die Farbe und Figur der Gegenstände, und auf den Grad ihrer Erleuchtung an. Wenn man z. E. einen gelben Kreis von eben der Größe, wie in (5) auf dem weißen Papiere verzeichnete, so würde man ihn bey weiten in der Entfernung gar nicht mehr sehen, in welcher der schwarze Kreis nur erst anfängt undeutlich zu werden.

Die größten Fixsterne machen an unserm Auge kaum einen Winkel von 1″ und wir sehen sie dennoch wegen ihres sehr lebhaften Glanzes.

Striche werden auf größere Weiten gesehen, als Punkte, oder Tüpfelchen von gleicher Breite, und längere Striche sieht man auf größere Weiten als kürzere gleich dicke. Jurin konnte einen Silberdrath von $\frac{1}{385}$ Zoll Dicke auf weißem Papiere unter einem Gesichtswinkel von $3\frac{1}{2}$ Sec. und eines seidenen Fadens Dicke unter einem Winkel von $2\frac{1}{2}$ Sec. noch sehen. Einzelne

isolirte Gegenstände bleiben auf eine größere Weite empfindbar, als gleich große, zwischen andern Objecten befindliche, Gegenstände, (Smiths Optik der deutsch. Ueb. S. 502.)

8. Hat man nun ein für allemahl durch eine Erfahrung den kleinsten Sehewinkel bestimmt, unter dem ein Auge einen gewissen Gegenstand noch deutlich empfindet, so können wir daraus herleiten, wie groß der Durchmesser eines andern Objects, dessen Weite vom Auge gegeben ist, seyn müsse, damit man es noch deutlich erkennen möge. Denn aus der Gleichung (3) wird umgekehrt

$$a = b \tan \varphi.$$

Ex. Gesetzt eine Person, deren kleinster Sehewinkel, bey schwarzer Farbe auf weiß, zwey Minuten betrüge, wollte eine gerade Linie LM Fig. XLIV, die auf dem Papiere mit Tusche gezeichnet ist, mit dem Zirkel fassen, und auf dem verjüngten Maaßstabe messen; die Entfernung dieser Linie vom Auge sey 8 Zoll, so ist $\varphi = 2$ Min. $b = 8$ Zoll, folglich der Diameter des kleinsten sichtbaren practischen Punktes der Linie LM $= 8$ Zoll $\times \tan 2' = 0{,}0005818 \cdot 8$ Zoll $= 0{,}0046544$ Zoll $= \frac{1}{215}$ Zoll. Um so viel kann also diese Person bey dem einen Endpunkte M der Linie LM, und um eben so viel auch bey dem andern L fehlen.

D. h. sie würde die Weite LM höchstens nur bis auf $\frac{2}{215}$ oder $\frac{1}{107}$ eines Zolles genau mit dem Zirkel fassen können; oder um so viel könnte sie LM zu groß oder zu klein nehmen, weil ihr die äussersten Gränzen dieser Linie in der Entfernung von 8 Zollen unkenntlich werden.

Wäre nun z. E. die Linie LM = 6 Zoll, so wäre das Verhältniß des Fehlers zur ganzen Länge = $\frac{1}{107}$: 6 = 1 : 642 oder blos wegen der undeutlichen Empfindung der äussersten Punkte dieser Linie, würde die Person, deren kleinster Winkel 2′ betrüge, die vorgegebene Länge LM, in einer Entfernung von 8 Zollen, nur höchstens bis auf ihren 642 Theil genau abtragen, und messen können, wenn auch gleich die Zirkelspitzen mathematische Punkte wären, und also aus dieser Ursache keine neuen Fehler entsprängen.

9. So läßt sich also aus dem bisherigen einigermaaßen die Genauigkeit bestimmen, mit der eine Person, deren kleinster Sehewinkel bekannt ist, eine vorgegebene Linie abtragen und messen kann. Indessen werden doch wohl in den meisten Fällen die Fehler, deren Grund in dem Baue unserer Augen liegt, nicht sehr beträchtlich seyn. Weit größer sind diejenigen, die aus Nachlässigkeit begangen zu werden pflegen. Z. E. wenn man die Zirkelspitzen nicht recht genau einsetzt, oder wenn sie nicht scharf

genug sind, die äussersten Gränzen einer Linie gehörig zu fassen.

10. Die bisherigen Betrachtungen werden bey Gelegenheit auch in der Folge noch nützlich seyn. Z. E. die Fehler zu bestimmen, die wegen der unterschiedenen Schärfe der Augen, beym Winkelmessen u. s. w. begangen werden können.

11. Verschiedene Versuche über die Schärfe der Augen, und die scheinbare Größe der kleinsten sichtbaren Punkte, bey verschiedener Farbe, und Erleuchtung derselben, sind von meinem Vater, Tob. Mayer, in den alten Göttingischen Comment. Soc. Reg. Tom. IV. pag. 120. beschrieben. Er folgert daraus, daß bey schwachen Erleuchtungen sich der kleinste Sehewinkel umgekehrt wie die Wurzel des sechsten Grades der Stärke der Beleuchtung verhalte.

Allerley hieher gehöriges enthält auch eine Schrift vom Hrn. Prof. Späth: Analytische Untersuchungen über die Zuverlässigkeit, mit welcher ein Landmesser — — Winkel und Linien abmessen kann. Altdorf und Nürnberg, 1789. 2ter Abschnitt.

12.

12. Die bisherigen Betrachtungen gelten überhaupt nur in so fern, als ein kleiner Gegenstand, z. E. ein Tüpfelchen blos undeutlich gesehen wird, weil es unter einem zu kleinen Sehewinkel ins Auge fällt, oder man nach Verhältniß des Durchmessers dieses Tüpfelchens zu weit von ihm weg ist.

13. Es lehrt aber auch die Erfahrung, daß ein solches Tüpfelchen undeutlich wird, wenn man es zu nahe an das Auge bringt.

14. Mit dieser Undeutlichkeit muß man die bisher betrachtete nicht verwechseln.

15. Die (13) erwähnte rührt nemlich nicht blos von der geringen scheinbaren Größe des Tüpfelchens her, sondern weil der ganze Gegenstand, von dem das Tüpfelchen ein Theil ist, undeutlich wird, so bald er dem Auge zu nahe kömmt, wovon die Optik den weitern Grund angiebt. Beym Abtragen der Linien nimmt man an, eine Linie erscheine im Ganzen deutlich, einzelne Punkte von ihr aber nur deswegen undeutlich, weil ihr Sehewinkel zu klein ist, oder vielmehr, weil unser Auge Schenkel eines Winkels, die zu nahe zusammenfallen, mit einander verwechselt und einen für den andern hält.

16. Aus dem bisherigen läßt sich auch der Fehler beurtheilen, den man beym Abstecken einer geraden Linie auf dem Felde, wegen des Sehewinkels, und dem davon abhängenden unrichtigen Visiren begehen kann.

Wären z. B. Fig. VIII. ab, cd, mn, die Durchmesser dreyer nach einer geraden Linie Oilk abzusteckenden Stäbe, so frägt sich, um wie viel kann der letzte Stab über mn fehlerhaft zu stehen kommen, wenn man das Auge in o hält, und nach der Vorschrift des §. 33 III. längs obdn an den Seitenflächen der Stäbe hinausvisirt?

Man gedenke sich bey o an der wahren Visirlinie on den kleinsten Winkel des deutlichen Sehens, so wird zwischen den Schenkeln desselben ein Stück der Linie hf enthalten seyn, so viel wird der Fehler betragen, um welchen der Stab über mn unrichtig zu stehen kommen kann.

Dieß zwischen den Schenkeln des gedachten Winkels enthaltene Stück der Linie hf wird, wie sich leicht einsehen läßt $= on \cdot \tan \varphi$.

Also $\varphi = 1'$ gesetzt, so kann mn um den Abstand 0,0002909 . on falsch zu stehen kommen. Wäre also z. B. on = 800 Fuß, so kann der Stab über mn um 0,232 eines Fuß-

ßes also ohngefähr um 2 Zoll falsch zu stehen kommen.

Da nun die Stäbe selbst gewöhnlich diese Dicke haben, so kann man den Stab mn in einer Entfernung von 800 Fuß um seine ganze Dicke selbst falsch abstecken, in so ferne man nur den Fehler betrachtet, der auch bey dem möglichst scharfen Visiren mit dem bloßen Auge noch statt finden kann. Bey dunkeler Witterung wird man den Fehler wohl noch viel größer ansetzen dürfen.

VII. Kapitel.

Von den zur Ausmessung der Winkel auf dem Felde gehörigen Werkzeugen.

§. 86. Die Größe eines vorgegebenen Winkels auf dem Felde zu bestimmen, ist eine der vorzüglichsten Aufgaben in der praktischen Geometrie. Man hat aber bey diesem Geschäfte alle mögliche Sorgfalt und Genauigkeit zu beobachten, theils, weil wir auf dem Felde keine gar zu großen Werkzeuge bequem gebrauchen können, theils, weil Fehler, die bey Winkeln begangen werden, gewöhnlich weit größern Einfluß haben, als solche, die bey Messung der Linien vorfallen. Es wird daher nothwendig seyn, nicht nur eine genaue Kenntniß der Werkzeuge hier beyzubringen, sondern auch die nöthigen Prüfungen und Vorsichten bey ihrem Gebrauche zu zeigen. Zugleich wird es nicht undienlich seyn, auch so viel als nöthig, einige Begriffe von ältern Werkzeugen beyzubringen, um die Zuverlässigkeit der damit vorgenommenen Messungen einigermaaßen beurtheilen zu können. Von dem Gebrauche und der Einrichtung neuerer Werkzeuge werde ich etwas um-

umständlicher handeln, als gewöhnlich in den Anleitungen zur practischen Feldmeßkunst zu geschehen pflegt.

Allgemeine Begriffe von Winkelmessern.

§. 87. Wenn man die Größe eines Winkels bestimmen will, so verlangt man dessen Werth in Graden, Minuten, und öfters wohl noch in kleinern Theilen.

Die Werkzeuge dazu bestehen hauptsächlich aus folgenden Stücken:

I) Aus einer ebenen Fläche oder Platte, worauf ein Kreis von einem willkührlichen Halbmesser gezogen ist, dessen Peripherie in seine einzelnen Grade, und wo möglich, noch in kleinere Theile eingetheilt worden. Dieser Kreis macht gewöhnlich, während der Messung eines Winkels, den unbeweglichen Theil des Werkzeugs aus.

II) Aus den beweglichen Diopterlinialen, oder Fernröhren, die man an der unbeweglichen Platte (I) so anbringt, daß sie sich um den Mittelpunkt des auf ihr beschriebenen Kreises herumdrehen, und nach Gegenständen hinrichten lassen, deren Winkel am Mittelpunkte des Werkzeugs man bestimmen will.

III) Aus dem Gestelle oder Stativ, auf dem die unbewegliche Platte mit ihren Diopteru ruht, und welches zu gleicher Zeit dienet, dem Werkzeuge eine bequeme Stellung zu geben.

Dieses sind im Ganzen die wesentlichen Stücke eines Winkelmessers. Die besondern Einrichtungen dieser einzeln Theile sind aber, in Absicht auf ihre Verbindung, ihren Gebrauch u. s. w. bey verschiedenen Gattungen solcher Werkzeuge, sehr mannichfaltig.

Bey einigen Werkzeugen wird die Größe eines Winkels, unmittelbar auf dem unbeweglichen Theile derselben (I), in Graden, Minuten u. s. w. bestimmt, wie auf den sogenannten Astrolabien u. s. w. Bey andern Werkzeugen erhält man auf der unbeweglichen Platte bloß den Winkel, ohne dessen Größe in Graden und Minuten, wie z. E. auf dem Meßtische, der Scheibe u. s. w. letztere Werkzeuge haben mit dem Astrolabio wohl die unbewegliche Platte gemein, nur befindet sich auf ihnen kein eingetheilter Kreis. Ich werde nun vors erste die nähere Einrichtung der einzeln Theile eines eigentlichen Winkelmessers oder sogenannten Astrolabii beschreiben.

Die

Die unbewegliche Platte des Astrolabii.

§. 88. Dieser Theil des Werkzeugs erfordert ohnstreitig die meiste Sorgfalt des Geometers. Es erhellet von selbst, daß der Kreis auf der unbeweglichen Platte des Astrolabii, so genau, als es die Größe des Halbmessers erlaubt, in seine einzeln Grade getheilt seyn müsse. Kleinere Theile, die man wegen der geringen Größe des Halbmessers nicht unmittelbar auf dem Kreise haben kann, erhält man vermittelst eines Vernier, und durch andere Einrichtungen, die ich in der Folge erklären werde.

Da man nämlich bey großen Messungen zugleich auf die Bequemlichkeit siehet, so nimmt man den Halbmesser des Kreises auf der Platte nicht leicht etwa über $\frac{3}{4}$ Fuß. Da die Platte und noch mehrere Theile eines Astrolabii meistens von Messing verfertigt werden, so würden diese Werkzeuge zu schwer ausfallen, und daher nicht bequem von einer Stelle zur andern gebracht werden können, wenn man dem Kreise einen größern Halbmesser geben wollte. Meistens begnügt man sich mit Winkelmessern, die nur $\frac{1}{2}$ Fuß im Halbmesser haben; aber den Halbmesser noch kleiner anzunehmen, würde wohl nicht zu rathen seyn, wenn bey Messungen die nur etwas ins Große gehen, die gehörige Genauigkeit soll erhalten werden können.

Ein Kreis, dessen Durchmesser = 1 Fuß ist, hat zu seiner Peripherie 3,1415 Fuß; da nun diese in 360 Theile oder Grade getheilet wird, so ist die Länge eines Grades = $\frac{1}{360}$ · 3,1415 = 0,0087 Fuß oder nicht völlig 1 Linie. Da also in diesem Falle schon die Grade auf dem Rande ziemlich klein ausfallen, so würde es große Schwierigkeit haben, die Länge eines jeden Grades, wieder in 60 Theile oder Minuten unmittelbar zu theilen. Man begnügt sich daher, auf dem Winkelmesser nur die einzeln Grade genau zu erhalten, die kleinern Theile bestimmt man durch den Vernier u. s. w.

Da nun die genaue Eintheilung des Kreises, auf der Platte des Werkzeugs, zu den wesentlichsten Vollkommenheiten eines Winkelmessers gehört, so wird der Geometer diese Theilung lieber selbst vornehmen, als sie von einem Mechanico bewerkstelligen lassen, von dem man nicht immer wissen kann, ob er hiebey allemahl die nöthigen Vorsichten gebraucht. Der Feldmesser könnte zwar die von dem Mechanico verfertigte Eintheilung prüfen, und die entdeckten Unrichtigkeiten bey Messung der Winkel in Betrachtung ziehen, allein die gehörige Prüfung ist oft mit weit größerer Mühe verbunden, als die Theilung des Werkzeugs selbst. Auch ist es unangenehm, beträchtliche Fehler in der Theilung eines Winkelmessers zu entdecken, und sie jederzeit in Rechnung bringen

zu müssen. Ich halte daher für nützlich, selbst die Mühe der Eintheilung zu übernehmen, wenn man anders glaubt, zu diesem Geschäfte einige Geschicklichkeit der Hände zu besitzen. Und wie nothwendig ist nicht diese überhaupt bey allen practischen Arbeiten, wobey man einige Genauigkeit verlangt.

Nicht immer stehen einem Feldmesser winkelmessende Werkzeuge in der Vollkommenheit zu Gebote, wie sie von einem Ramsden, Reichenbach, Baumann und andern berühmten Künstlern verfertigt werden. In der That hat man auch bey einer großen Menge von Arbeiten dergleichen kostbare Werkzeuge gar nicht nöthig. Mit Werkzeugen von einer einfachern Zusammensetzung und von minderer Güte, wie sie leicht von gewöhnlichen Künstlern verfertigt werden, lassen sich viel brauchbare Detailvermessungen bewerkstelligen, bey welchen nie derjenige Grad der Genauigkeit verlangt wird, den grössere Arbeiten erfordern Aber auch selbst bey großen Landesvermessungen kann nicht jeder untergeordnete Feldmesser mit einem so kostbaren Werkzeuge zum Winkelmessen versehen werden, als womit derjenige, welcher die ganze Messung dirigirt, und dem der möglichst genaue Entwurf des Hauptnetzes, an welches die Detailmessungen sich anknüpfen, übertragen ist, nothwendig versehen seyn muß. Für diese untergeordneten Feldmesser sind Winkelmesser, welche bis auf ei-

nige Minuten genau messen, in den meisten Fällen bey weiten hinlänglich, und sie können auch mit diesen, wenn es erforderlich ist, Winkel noch schärfer messen, wenn sie sich der unten (§. 135) gelehrten Methode bedienen wollen. Will man nun die Theilung eines solchen Werkzeugs keinem Künstler überlassen, wenn dieser in Ermangelung einer guten Theilmaschiene doch auch nur aus freyer Hand theilen müßte, so wird dasjenige, was ich davon im nächstfolgenden § beybringe, immer hinlänglich seyn, den Feldmesser zu belehren, auf welche Punkte er bey einem solchen Geschäfte seine vorzüglichste Aufmerksamkeit zu richten hat. Alle Handgriffe aber zu erzählen, würde zu weitläuftig seyn, da eine geschickte Hand und ein vorsichtiges Auge, verbunden mit einiger Uebung, gar leicht die Mittel finden, wenigstens grobe Fehler zu vermeiden.

Theilung eines Kreises in seine einzeln Grade.

§. 89. I) Zuvörderst muß man bey diesem Geschäfte mit einem guten Stangenzirkel versehen seyn, um den Kreis auf die metallene Platte, die zum Winkelmesser dienen soll, aufzureißen.

Dieses Werkzeug bestehet Fig. XLVI. Tab. III. aus einem viereckigten prismatischen, etwa

1 Schuh

1 Schuh langen Stäbchen AB, von Messing oder polirten Stahle: abcd, $\alpha\beta\gamma\delta$ sind viereckigte messingene Hülsen, in welche genau der prismatische Stab AB passet. Diese Hülsen sind an ihrer untern Fläche mit zwey Ansätzen versehen, an die man sehr scharfe stählerne Spitzen i, g senkrecht anschrauben kann. p und q sind ein paar andere Ansätze, durch welche die Stellschraube Ml gehet. Ersterer p befindet sich am Ende des prismatischen Stabes AB, der zweyte q ist aber auf der Hülse abcd befestigt. Die Vorrichtung dieser Stellschraube muß so beschaffen seyn, daß, wenn man sie herumdreht, sie der Hülse abcd, und folglich dem Stifte i eine sanfte Bewegung von A gegen B, oder von B gegen A ertheilt. b, n sind Schrauben, wodurch man die Hülsen an dem prismatischen Stabe in einer unverrückten Lage erhalten kann. Löset man die Schraube n an der Hülse $\alpha\beta\gamma\delta$, so läßt sich diese Hülse an dem prismatischen Stabe AB verschieben, wodurch denn die Stiften i, g in eine verlangte Weite von einander gestellt werden können.

Damit sich aber zwischen i, g eine gewisse Weite sehr genau fassen läßt, so dienet dazu die Stellschraube Ml; Sobald nämlich die Hülse $\alpha\beta\gamma\delta$, der abcd so nahe gebracht worden, daß zwischen g und i nur erst ohngefähr die verlangte Weite enthalten ist, so ziehet man die Schraube n an; löset hierauf die b und

wen-

wendet die Stellschraube Ml herum. Dann wird sich i, so wenig man will, verrücken lassen, bis zwischen i und g die verlangte Weite völlig genau enthalten ist. Wenn alsdann die Schraube b wieder angezogen wird, so läßt sich die abgefaßte Entfernung ig unverändert erhalten.

Dies ist ohngefähr die Einrichtung eines Stangenzirkels, wie ich ihn für hinlänglich bequem halte. Sonst läßt sich die Einrichtung mit der Stellschraube Ml auch auf mehr andere Arten gedenken, die wesentlich von der gegebenen nicht verschieden sind. Der im IVten Bande dieser practischen Geometrie (§. 18. IV.) beschriebene Stangenzirkel scheint noch etwas besser und dauerhafter zu seyn. Auch lassen sich noch Zusätze anbringen z. B. Maaßstäbe auf AB, durch Hülfe deren man die Spitzen i, g, sogleich in eine verlangte Weite stellen kann, woben denn Ml zugleich als Micrometerschraube dienen könnte, sehr kleine Theile des Maaßstabes auf AB anzugeben u. s. w. Einen solchen micrometrischen Stangenzirkel findet man in dem ersten Supplementsbande zu den Berliner astronomischen Jahrbüchern S. 189.

II) Nun lasse man zwey messingene Platten verfertigen, und solche wohl abschleifen, und etwas mattpolieren. Die erste, die ich in der Folge A nennen will, soll den Winkelmesser abgeben,

ben, und genau circulförmig abgerundet seyn. Die zweyte B dienet die Abtheilungen auf ihr zu verfertigen, um solche nachher ins Reine auf die Platte A abtragen zu können. Die erstere A kann, wie Fig. LVIII ausweiset auch schon sogleich mit den gewöhnlichen Ausschnitten oder Durchbrechungen um den Mittelpunkt herum versehen seyn, damit sie nicht zu schwer ausfalle, und blos einen etwa 1½ Zoll breiten Rand bilde, der durch die senkrecht auf einander stehen geblisbenen Queerstücke C, C, die im Mittelpunkte sich in eine kreisrunde Platte vereinigen, den gehörigen Grad der Unbiegsamkeit oder Spannung erhält. Die Dicke der Platte A, darf bey einem Winkelmesser von etwa 1 Schuh im Durchmesser, wohl nicht weniger als 1½ pariser Linie betragen.

III) Ist nun die Größe des Halbmessers für den einzutheilenden Umkreis des Winkelmessers festgesetzt, so fasse man diese Länge zwischen die beyden Spitzen des Stangenzirkels (I) behalte sie unverrückt, und ziehe mit diesem Halbmesser auf beyden Platten A und B zwey gleich große Kreise, so zart als möglich. S. die Fig. XLVII. Tab. III. Man setzt zu dieser Absicht die eine Spitze des Stangenzirkels in die Mitte der Platten A, B, und fährt mit der andern ganz sanft in einem Kreisbogen herum. Damit sich von diesem gezogenen Kreisbogen der Auswurf des Messings oder der so-

gehannte Grad versiehre, der durch das Einreißen mit der Spitze des Stangenzirkels entstanden ist, so schleife man sie mit einer wohl geebneten naß gemachten harten Kohle wieder ab; ehe man zur Eintheilung selbst schreitet. Dadurch werden diese Kreisbogen erst die Feinheit erhalten, die erforderlich ist; um Punkte auf ihnen mit der gehörigen Genauigkeit abstechen zu können.

IV) Da nun bekanntermaaßen der Halbmesser eines Kreises als Sehne genau 6 mahl in dessen Peripherie herumgetragen werden kann, so behalte man die Weite, womit in (III) die Kreise gezogen worden, unverändert, und trage sie in die Umkreise A, B, 6 mahl herum, so sind die Bogen ab = bc = cd u. s. w. so wie auch die $\alpha\beta = \beta\gamma$ u. s. w. jeder = 60°.

Es versteht sich, daß man bey diesem Geschäfte alle mögliche Sorgfalt anwenden müsse, sowohl die Spitzen des Stangenzirkels genau in die Bogen einzusetzen, als auch die Theilpunkte a, b, α, β, u. s. w. so zart anzugeben, daß man Mühe hat, sie mit bloßen Augen zu erkennen. Diese Erinnerung gilt überhaupt bey jeder folgenden Eintheilung.

V) Ferner kann man auf dem Kreise B ?n solchergestalt erhaltenen Bogen von 60° $\beta\gamma$ abermahls sehr leicht durch Hülfe

des

des Stangenzirkels halbiren. Die beste Methode, durch Versuche dieses zu bewerkstelligen, ist folgende.

VI) Man fasse zwischen beyde Spitzen des Stangenzirkels eine Weite, wodurch man ohngefähr nach dem Augenmaaße glaubt, den Bogen $\beta\gamma$ halbiren zu können, setze die eine Zirkelspitze in den Punkt β, und mache mit der andern in den Kreisbogen einen sanften Einschnitt v. Hierauf setze man, bey unveränderter Oefnung des Stangenzirkels, die eine Zirkelspitze in γ ein; wenn nun die andere genau in den Durchschnittspunkt v fiele, so würde die Weite der beyden Spitzen des Stangenzirkels, genau die Halbirungsweite des Bogens $\beta\gamma$ seyn.

Trifft aber die andere Zirkelspitze nicht in den Punkt v, so mache man einen zweyten Einschnitt w. Dann erhält man die beyden Punkte v, w. Wenn diese nahe genug neben einander sind, mithin das Räumchen vw sehr klein ist, so kann man ziemlich genau schon nach dem bloßen Augenmaaße die Mitte desselben i, welche zugleich der Halbirungspunkt des Bogens $\beta\gamma$ seyn muß, treffen. Man lasse die eine Zirkelspitze in γ stehen, und verändere, vermittelst der Stellschraube, die andere Spitze, bis sie in i, oder in die Mitte zwischen v und w hintrifft. Da aber solchergestalt i nur durchs

A-

Augenmaaß bestimmt wird, so kann man doch noch um etwas fehlen; Man muß daher mit der Weite γi wieder eben den Versuch anstellen, den man anfangs mit der Weite βv, oder γw vornahm, so wird man es endlich dahin bringen, daß ein paar Durchschnittspunkte, wie v, w, immer näher zusammen rücken, bis sie völlig genau in einen einzigen Punkt i zusammenfallen, der alsdann der wahre Halbirungspunkt des Bogens βγ seyn wird. Mit dieser Weite, die solchergestalt den Bogen βγ = 60° halbirt, kann man hierauf auf dem Kreise A jeden Bogen von 60°, wie bc, cd halbiren, wobey man aber sehr behutsam verfahren muß, damit sich die gefundene Weite zwischen beyden Spitzen des Stangenzirkels nicht verrücke.

VII) Auch halbire man mit der Weite βi jeden Bogen von 60° auf dem Kreise B.

VIII) Man kann hierauf, um sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, auf dem Kreise A die Weite gd = gc + cd = 30° + 60° = 90° mit dem Stangenzirkel fassen, und versuchen, ob sie durchgehends viermahl in den ganzen Umkreis herumpasset, bey welchem Theilpunkte b, g, c, d man auch anfangen mag.

IX) Auf eine völlig ähnliche Art halbirt man ferner, auf dem Kreise B jeden Bogen

von

von 30°, z. E. den Bogen $\beta i = 30°$, bey x, so wird $\beta x = 15°$ und mit dieser Weite kann man alsdann auf dem Kreise A auch jeden Bogen von 30° halbiren.

X) Um nun endlich auf dem Kreise B die einzeln Grade zu erhalten, so theilt man einen Bogen von 15° erst in 3 Theile, und dann jedes Drittel wieder in 5 Theile; Man muß hier freylich blos durch Versuche diese Eintheilungen bewerkstelligen.

Da aber auf dem Kreise B sich der Bogen von 15° sehr oft befindet, so kann man die Versuche auch oft anstellen, und sollte etwa auf einem Bogen von 15° die Theilung unglücklich ausfallen, so kann man solche auf einem andern Bogen vornehmen, bis man endlich einen erhält, der mit aller möglichen Genaugkeit in seine einzeln Grade getheilet ist. Von diesem Bogen werden alsdann die einzeln Grade auf den Kreis A abgetragen. Dieses geschiehet so:

Von dem richtig eingetheilten Bogen von 15° auf dem Kreise B, fasset man erstlich mit aller möglichen Sorgfalt, die Weite eines Grades, und trägt sie auf den Kreis A, z. E. von f nach 1; Dann nimmt man auf dem Kreise B die Weite von 2°, und trägt sie von f nach 2; Hierauf werden 3° von f nach 3 getragen u. s. w. bis man auf dem Kreise A den Bogen fm in seine 15° getheilt hat.

Um eben so auf dem nächsten Bogen mn = 15°, die einzeln Theile zu erhalten, so fasse man auf dem Kreise A, nach der Ordnung die Weiten $l1 = 15° + 1°$, $l2 = 15° + 2°$, $l3 = 15° + 3°$ u. s. w. Setze allemahl die eine Zirkelspitze in f, so wird die andere zwischen m und n fallen, und auf dem Bogen mn solchergestalt die Theilpunkte für die einzeln Grade angeben, und so kann man, wie ein kleines Nachdenken zeigen wird, auf dem Kreise A jeden Bogen von 15° sehr genau in seine einzeln Grade theilen.

Uebrigens erhellet, daß man beym Eintheilen und Abtragen der erhaltenen Theile vortheilhaft auch die zweyte Theilungsmethode (§. 69. IX) wird anwenden können.

Die Theilung des Bogens von 15° auf dem Kreise B, verrichte ich blos vermittelst eines sehr spitzigen und gehärteten Federzirkels, davon §. 62. 6. die Beschreibung gegeben worden ist: Denn der Stangenzirkel ist, wenn die Theile so klein werden, mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden, wenn er nicht selbst sehr klein ist. In Ermangelung eines Federzirkels könnte man sich auch blos des gewöhnlichen Handzirkels bedienen, dessen Spitzen sehr scharf und gehärtet seyn müßten. Allein, man wird ihn nicht mit leichter Mühe so genau und sicher stellen können, als den Federzirkel.

Die

Die sogenannten Haarzirkel, dergleichen man in Leupolds Th. Geom. §. 287. (das. in der XX. Tafel die XIII. Figur) beschrieben findet, würden auch zur Theilung eines Kreises gute Dienste leisten.

XI) Auch wird es während der Theilung nicht überflüssig seyn, sich beständig eines Vergrößerungsglases oder noch besser einer Vergrößerungsbrille etwa von 2 bis 3 Zollen in der Brennweite, zu bedienen, sowohl um die Zirkelspitzen desto genauer in die Theilpunkte einsetzen zu können, als auch selbst kleine Fehler in der Theilung auf dem Kreise A, bemerkbarer zu machen. Die Theilpunkte auf dem Kreise A werden aber vermittelst eines sehr spitzig und konisch zulaufenden stählernen Punzen, sichtbar gemacht. Es werden nämlich anfangs die Stellen, wo die Abtheilungen hinfallen, blos durch sehr zarte Einschnitte mit dem Federzirkel angegeben, die sich allenfalls wieder wegpoliren lassen, wenn einige davon unrichtig ausgefallen seyn sollten. Die wahren und richtig befundenen Theilpunkte werden aber vermittelst des erwähnten Punzen durch zarte Tüpfelchen, die nicht größer als etwa 0,001 eines Zolles seyn müssen, bemerkt, bey welchem Geschäfte man denn den Punzen immer möglichst senkrecht auf die Ebene des Randes halten muß, damit die eingedrückten Theilpunkte nicht unrichtig ausfallen.

Anmerkung.

Vielleicht ist folgende Theilungsmethode der vorhergehenden noch vorzuziehen.

Nachdem man nach (VII) den Umkreis von 30 zu 30 Graden abgetheilt hat, so trage man in den Quadranten gd (VIII) aus g in k die Sehne von 26 Graden in Theilen des angenommenen Halbmessers nach einem genau abgetheilten Maaßstabe. Z. E. wenn der Halbmesser Ac = 5 Zoll wäre, so nehme man die Sehne gk = 5 . 2 sin 13° = 2, 249 Zoll. (Einen Maaßstab hierzu, der nur einige Zolle lang seyn dürfte, kann man sich nach (§. 65.) leicht verfertigen), so ist der Bogen kd = 90° — 26° = 64°. Diesen kann man nun durch fortgesetzte Halbirung bis auf einzelne Grade abtheilen, die man nachher auch auf die übrigen Bogen ga, dn ꝛc. jedoch mit Bemerkung der (§. 69. VII.) angegebenen Vorsichten herumtragen kann.

XII) Ist nun die ganze Eintheilung auf der Platte A vollendet, und durch vielfältige Prüfungen als richtig befunden worden, so nimmt man wieder den Stangenzirkel zur Hand, und ziehet aus dem Mittelpunkte A in einiger Entfernung von dem eingetheilten Kreise abcdefa einen zweyten etwas stärker eingerissenen Kreis, dessen Halbmesser etwa um eine oder $1\frac{1}{2}$ Linie größer ist, als der Halbmesser

des

eingetheilten: Zwischen diese beyden concentrischen Kreise werden alsdann die Theilstriche ausgezogen.

Zu diesem Geschäfte bediene ich mich bloß eines Federmessers, dessen Spitze aber sehr hart, scharf und dünne geschliffen seyn muß. Ich lege an den Mittelpunkt A, und an jeden Theilpunkt a, b, c u. s. w. ein stählernes Linial sehr genau an, und ziehe längs desselben, von jedem Theilpunkte bis an den äussern Umkreis, sehr zarte Theilstriche mit dem Federmesser aus. Wenn der äussere Kreis gut gezogen ist, so darf man so leicht nicht befürchten, mit der Spitze des Federmessers über ihn hinauszufahren, wodurch die Theilstriche von ungleicher Länge ausfallen würden. Die Hauptsache aber ist, daß die Theilstriche genau durch die Theilpunkte gerissen werden. Man wird aber dieses sowohl sehen als fühlen können, besonders wenn die Tüpfelchen gut gemacht sind, und man sich eines Vergrößerungsglases bedient, auch erst mit der Spitze des Federmessers längs des Linials herfährt, um zu fühlen, ob man genau durch den Punkt komme, ehe man den Theilstrich würklich ausziehet.

Man kann sich zum Einreissen der Theilstriche auch eines sehr scharfen stählernen, und konisch zulaufenden Punzen bedienen.

Da der erste Kreis auf der Platte A zum Behuf der aufzutragenden Theilpunkte anfangs nur ganz zart eingerissen seyn muste, so kann man nunmehr, nachdem die Theilstriche gezogen worden sind, auch diesen Kreis noch etwas stärker einreißen, damit er mit dem zweyten (XII) ohngefähr gleiche Dicke erhalte.

XIII) Endlich poliert man das Rauhe von der Platte ab, und überzieht die Theilstriche mit Druckerschwärke, nach deren Wegwischung alsdann die Striche sehr rein und deutlich in die Augen fallen.

Auf diese Art kann man mit ziemlicher Genauigkeit einen Winkelmesser eintheilen, wie ich selbst den Versuch gemacht habe. Ueberhaupt muß man sich aber bey diesem Geschäfte nicht übereilen, und sich keine Mühe verdrießen lassen, durch öfters wiederhohlte Prüfungen die erhaltenen Theilpunkte zu berichtigen. Auch kann es nicht schaden, wenn man sich insbesondere im Ziehen der Theilstriche zuvor einige Fertigkeit erworben hat.

XIV) Die meisten Künstler theilen die geometrischen Werkzeuge bloß auf der sogenannten Theilscheibe. Aber die gewöhnlichen Theilscheiben verstatten wohl den Grad der Genauigkeit nicht, den man sich von der unmittelbaren Eintheilung nach dem bisher gewiese-

nen

nen Verfahren, zu versprechen hat. Selten habe ich Winkelmesser für richtig befunden, von denen ich wußte, daß sie auf solchen Theilscheiben getheilt waren.

XV) Die Methode, deren sich Helfenzrieder (Anleitung zur Geodäsie. Ingolstadt und Augsb. 1775.) daselbst im 7ten Kap. bedient, halte ich nicht für sehr zuverlässig, und die Zurüstungen, die man vorher machen muß, sind ohne Noth zu weitläuftig und erkünstelt.

Ich halte die einfachste Methode immer für die beste; und die ist doch wohl, bey einem geometrischen Winkelmesser, der bloße Gebrauch eines Stangen- und Federzirkels. Bey größern Winkelmessern, z. E. von 2 und mehrern Fußen im Halbmesser, bestimmt man die Abtheilungen durch ihre Chorden, die man vorher berechnet, und alsdann von einem sehr genau eingetheilten Maaßstabe abträgt. Man kann das ganze Verfahren in des geschickten Künstlers J. Bird's *Method of dividing astronomical instruments*, wovon sich in Kästners astron. Abh. II. Theil eine Uebersetzung befindet, nachlesen. Bey einem so kleinen Winkelmesser, als man meistens zum Feldmessen gebraucht, ist es unnöthig, ein ähnliches Verfahren anzubringen; Die Verfertigung eines so genau eingetheilten Maaßsta-

des für die Chorden, kostet fast eben so viel Arbeit, als die Theilung des Kreises selbst. Getrauet man sich nicht, eine solche Theilung sogleich auf dem Rande des zu verfertigenden Winkelmessers selbst, reinlich zu erhalten, welches ich freylich für das Beste hielte, so wird doch das in (I — XII) gelehrte Verfahren, bey gehöriger Vorsicht im Abtragen der Theile, alle Genauigkeit gewähren.

XVI) Auch in den Memoires de l'acad. roy. des Sciences à Paris 1765. befindet sich eine Abhandlung des Duc de Chaulnes über die Theilung der Winkelmesser. Aber der hierzu gehörige Apparat ist etwas weitläuftig und kostbar, und besteht in einer besondern Einrichtung der Theilscheibe, die hier keine Beschreibung verstattet. Indessen ist er dadurch, so wie durch gehörige Anbringung dioptrischer Werkzeuge, wodurch dem schwachen Auge nachgeholfen wird, in den Stand gesetzt worden, einen Winkelmesser von ohngefähr 11 pariser Zollen im Halbmesser, zu verfertigen, womit ein Winkel beynahe so scharf, als mit einem astronomischen Quadranten von 6 Fuß im Halbmesser, gemessen werden konnte, wie die Beobachtungen ausweisen, welche mit diesem Werkzeuge auf der Sternwarte zu Paris, über die Schiefe der Ekliptik angestellt worden.

Nachher hat der Abt Fontana zu Florenz die Methode des Hrn. de Chaulnes einfacher,

facher, bequemer und allgemeiner zu machen gesucht. Wer hievon nähern Unterricht verlangt, findet ihn in der Vorrede der italienischen Uebersetzung eines Werks, welches die Londner Soc. der Künste herausgegeben hat (*Avanzamento dell' arte delle Manifatture e del Commercio etc. Firenze*, 1773. in Fol. 2 Tomi.

Hr. Halle in Berlin hat von dem Verfahren des Duc de Chaulnes eine Uebersetzung geliefert. Neue Art mathematische und astronomische Instrumente abzutheilen, nach Anweisung des Hrn. *Duc de Chaulnes*, aus dem Franz. von J. S. Halle. Berlin, 1788.

XVII) Zu einer sehr grossen Vollkommenheit in Eintheilung winkelmessender Werkzeuge hat es der berühmte englische Künstler Ramsden gebracht. Das Verfahren desselben hat de la Lande in einer französischen Uebersetzung der Handschrift, welche Ramsden den Commissarien der englischen Admiralität übergeben hatte, dem Publicum mitgetheilt. Description d'une machine pour diviser les instrumens de Mathematiques par Mr. Ramsden, de la soc. Royale de Londres, publiée à Londres en 1787. par Ordre du bureau des Longitudes (die gedruckten englischen Exemplare giengen alle in einem Brande verlohren) traduite de l'anglois, augmentée

de la description d'une machine a diviser les lignes droites, et de la notice de divers ouvrages de Mr. Ramsden, par Mr. de la Lande — — à Paris, 1790.

Ramsden bedient sich zur Theilung ebenfalls einer Theilscheibe, aber von einer besondern Einrichtung, wodurch die Unvollkommenheiten der gewöhnlichen Theilscheiben wegfallen, und die Eintheilungen so genau gemacht werden können, daß Werkzeuge von einem sehr kleinen Halbmesser, z. E. 5 bis 6 zöllige Sextanten oder Octanten, die Winkel wenigstens innerhalb einer halben Minute genau messen. (Ueber die Genauigkeit der Beobachtungen mit englischen — — Hadleyischen Sextanten von wenigen Zollen, von Hrn. Obristlieutenant von Zach in dem Berliner astronomischen Jahrbuche 1789. S. 236 ꝛc.

Der vorzüglichste Theil der Ramsdenschen Maschine besteht in einer metallenen Scheibe von 45 Zollen im Durchmesser, deren Umfang mit Einschnitten versehen ist, in welche eine auf einem festen Gestelle angebrachte Schraube ohne Ende eingreift, wodurch diese Scheibe und folglich auch das darauf befestigte und einzutheilende Werkzeug dergestalt um ein gemeinschaftliches Centrum gedreht werden kann, daß die kleinern Abtheilungen des Randes (die größern sind durch eine Handtheilung unmittelbar auf dem Rande der Theilscheibe bestimmt) nach

nach Maaßgabe der Umwendungen jener Schraube, und durch eine zugleich mit ihr in Verbindung stehende Vorrichtung zum Einreissen der Theilstriche, viel schärfer, sicherer und in kürzerer Zeit (Ramsden braucht, um einen Octanten von 10 zu 10 Minuten einzutheilen, nicht mehr als eine halbe Stunde Zeit) sich bestimmen lassen, als durch die bisherigen Theilscheiben geschehen konnte. Er beschreibt zugleich die Vorrichtungen, wodurch er sich von der Gleichheit der auf dem Umfange der Theilscheibe eingeschnittenen Vertiefungen, in welche die Gänge der Schraube eingreifen, versichert hat. Die weitere Beschreibung des ganzen Apparats dieser Theilungsmaschine kann man in der erwähnten Schrift mit mehrerem ersehen. Eine Uebersetzung davon ins Deutsche findet man in Hrn. J. G. Geislers ——Schrift, über die Bemühungen der Gelehrten und Künstler, mathematische und astronomische Instrumente einzutheilen. Dresden, 1792. welche denen, die sich mit Eintheilungen der Werkzeuge abgeben, sehr willkommen seyn wird. Ueber Branders, (nunmehr Höschels), Hindleys, und anderer Theilungsmethoden muß ich ebenfalls auf diese Schrift verweisen.

Man sehe auch dessen Uebersetzung von George Adams geometrischen und graphischen Versuchen, oder Beschreibung der math. Instrumente 2c. Leipz. 179– S. 104 2c.

XVIII) In den Philosophical Transactions Year 1809. P. I u. IV. hat Troughton eine Methode angegeben, astronomische und andere Werkzeuge abzutheilen, ohne dabey die gewöhnlichen Vorrichtungen zum Eintheilen anzuwenden, und dies mit einer Genauigkeit zu bewerkstelligen, daß dabey keine größere Fehler vorfallen, als nur diejenigen, welche dem Auge zur Last gelegt werden können, wenn es mit den besten optischen Hülfsmitteln, kleine Größen wahrzunehmen und zu messen, versehen ist. Man gedenke sich einen Kreis, welcher sich über den Umfang eines andern größern fortwälzt, beyde in einer und derselben Ebene. Der Umfang des Kleinern sey ein aliquoter Theil des Größern z. B. $\frac{1}{16}$, so wird jede Umwälzung des Kleinern den 16ten Theil auf dem Umfange des Größern abschneiden. Ist nun der Umfang des Kleinern selbst wieder in eine Anzahl gleicher Theile z. B. durch fortgesetztes Halbiren in 16 abgetheilt, so wird, wenn sich der kleinere um einen solchen Theil des Umfanges fortgewälzt hat, dadurch auf den Umfange des größern der 16 . 16 oder 256te Theil abgeschnitten. Dies ist die Idee, welche bey dem Verfahren des Hrn. Tr. zum Grunde liegt. Der Kleinere Kreis ist die Vorrichtung die er Roller nennt, und die sowohl im Grund- als Aufrisse deutlicher beschrieben ist. Ueber den Abtheilungen des Roller befindet sich ein Microscop, durch welches man genau bemerken kann, wenn sich dieser oder jener Theilpunkt des Roller

an

an dem Rande des einzutheilenden Werkzeugs befindet, der dann durch eine zugleich angebrachte Punctirspitze auf dem Rande bemerkt werden kann. Andere Vorrichtungen nebst dem Verfahren des Verf. kleine Theilungsfehler welche von dem Roller sich auf den einzutheilenden Rand fortpflanzen, aufzufinden und zu berichtigen, so wie ferner aus den auf dem Umfange des Randes erhaltenen Bissectional-Abtheilungen, die Theilpunkte für die gewöhnliche Gradabtheilung richtig zu erhalten, verstatten hier keinen Auszug. Ob diese Theilungsmethode vor andern bekannten zu empfehlen seyn mögte, dürfte meines Erachtens, aus mehrern Gründen sich doch wohl noch bezweifeln lassen.

In eben diesem Bande Part II. N. XIII. hat Cavendisch eine neue Methode der Abtheilung angegeben. Die meisten Fehler bey der Eintheilung aus freyer Hand vermittelst des Stangeszirkels rührten daher, daß wenn man den einen Fuß eines Stangenzirkels in einen Theilpunkt einsetzt, um mit dem andern eine gewisse Sehne oder Bogen abzutragen, einen feinen Theilstrich zu reißen, oder einen Bogen zu halbiren u. dergl. jener Theilpunkt nicht allein leicht aus seiner wahren Lage verrückt werde, sondern daß es auch etwas schwer halte, zwischen zwey nahen Strichen einen Punkt gerade in der Mitte anzugeben, ohne daß eine von den Spitzen des Zirkels etwas ausglitsche. Hr. C. hat daher einen Stangenzirkel so ein-

gerichtet, daß derselbe nur mit einer Spitze versehen ist, derjenigen, womit man Strichelchen zu ziehen hat, die andere dagegen durch den Faden im Brennpunkte eines Microscops ersetzt wird, welchen man über jeden Punkt des Randes sehr genau stellen kann. Der Stangenzirkel mit dem Microscop wird daher auf einer messingenen Platte festgestellt, welche sich an den Rande des einzutheilenden Werkzeugs verschieben läst, so daß zwischen der Spitze des Stangenzirkels und derjenigen Stelle, wo die Axe des Microscops hintreffen würde, ein jeder Bogen des Randes gefasset werden kann. Ohne Zeichnung läst sich das weitere nicht deutlich machen.

Bird hat bekanntlich seine Werkzeuge ohne alle solche Hülfsmittel getheilt, und seine Mauerquadranten sind ein Muster der Genauigkeit. Der bloße Gebrauch von Stangenzirkeln mit zwey Spitzen muß also bey gehöriger Geschicklichkeit und Sorgfalt, doch wohl so nachtheilig nicht seyn, als die Herrn Troughton und Cavendisch dafür halten. Es läßt sich vielmehr vermuthen, daß so zusammengesetzte Vorrichtungen, als statt des gewöhnlichen Stangenzirkels angegeben werden, noch weit mehr Aufmerksamkeit und Vorsicht erforden, um vor Irrthümern sicher zu seyn. Hat sich Bird bey den feinsten Abtheilungen astronomischer Instrumente des Stangenzirkels, und der freyen Hand bedient, so

wird

wird ein ähnliches Verfahren bey kleinern, blos geometrischen Werkzeugen um so weniger zu tadeln seyn, als nicht jedem Künstler oder Geometer solche Theilmaschinen zu Gebothe stehen, als wodurch man in den neuern Zeiten, das Theilungsgeschäfte freylich auf den höchsten Grad der Genauigkeit gebracht hat.

XIX) Unter deutschen Künstlern ist wohl unstreitig der Salinenrath Reichenbach in München derjenige, dessen winkelmessende Werkzeuge sowohl zu astronomischen als auch zu geodätischen feinen Messungen alles übertreffen, was in dieser Art von Werkzeugen nur je von deutschen und ausländischen Künstlern geliefert worden ist. Die hiesige Sternwarte besitzt jetzt von ihm einen Repetitionskreis (m. s. unten §. 135 ꝛc.) mit zwey Fernröhren von 12 Zoll Durchmesser, und einen Repetitions-Theodoliten von 8 Zoll im Durchmesser. Auf ersterem ist der Hauptkreis, welcher die Gradabtheilungen enthält, von eingelegten Silber, und jeder Grad ist durch höchst feine Theilstriche unmittelbar wieder in 12 gleiche Theile (also von 5 zu 5 Minuten) getheilt, deren jeder durch Hülfe eines Nonius wieder in 75 kleinere zerfällt, so daß mithin jeder Winkel durch Hülfe des Nonius, innerhalb 4 Secunden gemessen werden kann. Die Theilstriche sind so zart und rein durchaus, und die ganze Theilung selbst ist so genau, daß man bey einer gehörigen Beleuchtung und

durch Hülfe eines zweckmässig angebrachten Microscops, in der Schätzung des Zusammentreffens der Theilstriche des Nonius mit denen des Randes selten um 4 Secunden fehlt. Das Instrument führt 4 dergleichen Nonien, unter rechten Winkeln von einander abstehend, durch welche Einrichtung also jeder Winkel 4 mahl abgelesen werden kann. Diese Nonien verschieben sich nicht, wie gewöhnlich über die Ebene des eingetheilten Randes, sondern liegen vielmehr mit demselben, in einer und derselben Ebene, indem sie auf einem eigenen zweyten Kreise verzeichnet sind, der sich innerhalb des erstern, so vollkommen concentrisch bewegt, daß selbst durch ein Vergrößerungsglas nicht der geringste Zwischenraum wahrzunehmen ist, und dennoch die Bewegung mit der größten Leichtigkeir von Statten geht. Die Striche auf den Nonien scheinen daher unmittelbar an diejenigen des eingetheilten Randes anzustossen, wodurch die Genauigkeit des Ablesens sehr befördert wird. Eine ähnliche Vollkommenheit der Eintheilung hat das zweyte Instrument. Man sehe über beyde eine umständlichere vorläufige Notiz von unsern Hrn. Prof. und Ritter Gauß in den Götting. G. Anz. 1813. 75 Stück. Wahrscheinlich wird eine vollständige Beschreibung und Abbildung dieser vortreflichen Instrumente, nächstens erscheinen. Was aber zu wünschen übrig bleibt wäre, daß es Hrn. Reichenbach gefällig

seyn

seyn mögte, auch die Theilmaschine bekannt zu machen, wodurch er seinen Werkzeugen einen so hohen Grad der Vollkommenheit zu verschaffen weis.

XX) Untersuchungen über die Genauigkeit einer aus freyer Hand gemachten Theilung, besonders nach Birds und Branders Verfahren, findet man in Hrn. Prof. Späths zu München Schrift (Abhandlung zu Berechnung des Grades der Genauigkeit, mit welcher auf einem Mauerquadranten — — die Abtheilung der Theilkreise für die 90 und 96 Theilung vollführt werden kann. Leipz. 1788.) Die in dieser Schrift gegebenen Formeln lassen sich leicht auch auf die geometrischen Werkzeuge anwenden. Hr. S. betrachtet darin die unvermeidlichen Fehler, für welche kein Künstler gut stehen kann, und die theils von der Schärfe des Gesichts und des Gefühls (z. E. beym Einreissen der Theilstriche durch bereits bemerkte Punkte) theils von der Beschaffenheit der Eintheilungswerkzeuge, z. E. der Stangen- und Federzirkel ꝛc. von dem Grade der Wärme, Trockenheit, und Feuchtigkeit der der Luft, von der Ausdehnung und Zusammenziehung der Platte, worauf die Eintheilungen gemacht werden, und andern Umständen, abhängen. Bey der geringen Größe der geometrischen Werkzeuge verschwinden zwar sehr viele

dieser Fehlerchen, aber dergleichen Betrachtungen dienen doch, den Künstler überhaupt aufmerksam zu machen, und lehren den Grad der Zuverlässigkeit bey geographischen Messungen zu beurtheilen, bey denen nicht selten auch größere Werkzeuge gebraucht werden.

Ueber die Feinheit der Theilstriche auf dem Rande des Winkelmessers.

§. 90. I) Diese ist, ausser der Gleichheit der Theile, eine der nothwendigsten Erfordernisse eines Winkelmessers, und die Theilstriche müssen desto zärter auf die Platte gerissen werden, je kleiner der Halbmesser des Kreises ist.

II) Der Halbmesser eines Kreises heiße a, so ist dessen Umkreis $= 3,1415 \cdot 2a$; Gesetzt nun die Dicke eines Theilstrichs, oder Punkts auf der Peripherie heiße b, so kann man die Anzahl von Secunden finden, die dieser Theilpunkt auf dem Umkreise einnimmt. Da nähmlich der ganze Umkreis 1296000 Sec. hält, so schließt man nach der Regel de Tri $3,1415 \cdot 2a : b = 1296000$: zur Anzahl von Secunden $= x$ die der Theilstrich einnimmt. Also ist

$$x = \frac{648000}{3,1415} \cdot \frac{b}{a} \text{ oder}$$

$$= 206264 \cdot \frac{b}{a} \text{ Secunden.}$$

Er-

Ex. Es sey a = 1 Fuß = 10 Zoll, b = 0,001 Zoll, so wird

$\frac{b}{a} \cdot 206264 = 0,001 \times 206264$ Sec. = 20″, 62. Wenn also bey einem Winkelmesser von 1 Fuß im Halbmesser, die Dicke eines Theilstrichs nur 0,001 Zoll beträgt, so nimmt dieser Theilstrich schon einen Bogen von 20″ auf dem Rande ein.

III) Dieses zeigt die Nothwendigkeit, die Theilstriche so fein zu ziehen, daß man sie mit Mühe durch die bloßen Augen erkennen kann, wenn man anders bey Winkelmessungen einige Schärfe verlangt.

Es wird gut seyn, bey einem Winkelmesser, den man gebrauchen will, vorher die Dicke der Theilstriche zu untersuchen. Dieß dient zur Beurtheilung des Fehlers, der daraus entstehen kann.

IV) Die Dicke eines solchen Theilstrichs oder Punktes bekommt man ohngefähr, indem man ihn durch ein Vergrößerungsglas nach dem Augenmaaße, z. B. mit der Dicke eines neben ihn gehaltenen feinen Drathes vergleicht, und nun die Dicke dieses Drathes selbst, entweder nach (§. 82. IV. VI.) bestimmt, oder ihn zu wiederhohlten mahlen dicht nebeneinander um einen Cylinder wickelt, und nun untersucht, wie

viel dergleichen Drathdicken z. B. auf ¼ Zoll, oder auf eine andere bekannte Länge gehen.

Der Werth von a in obiger Formel (III) ist der Sehne von 60 Graden auf dem Rande des Werkzeugs gleich, die man also nur abfassen und messen darf.

Verschiedene Arten des eingetheilten Randes.

§. 91. Meistens bestehet der eingetheilte Rand eines Winkelmessers, aus einem ganzen Kreise.

Man findet aber auch Werkzeuge, die nur aus einem Halb- oder Viertelkreise bestehen; die letztern nennt man Quadranten.

Da es in der Ausübung sehr oft vorkömmt, Winkel nach allen Richtungen aus einem gewissen Standpunkte aufzunehmen, so ist der ganze Kreis freylich zu dieser Absicht am bequemsten, weil man da nicht nöthig hat, das Werkzeug von neuen zu stellen, sobald die Winkel zu groß werden, welches dagegen bey Quadranten und Halbkreisen erforderlich ist. Auch verstattet der ganze Kreis die so nützliche Anwendung des Verfahrens für genauere Ausmessung der Winkel, wovon unten §. 135. gehandelt wird.

Da

Da indessen Winkelmesser deren Rand aus einem ganzen Kreise besteht, die Unbequemlichkeit haben, daß sie zu schwer und kostbar ausfallen, wenn ihr Halbmesser grösser als etwa ½ Fuß ist, so hat man insbesondere bey grossen Vermessungen, bey Gradmessungen auf der Erde, bey Höhenmessungen u. dgl. sich immer gern der Quadranten bedient, weil diese ohne höhere Kosten einen grössern Halbmesser, mithin auch eine schärfere Eintheilung auf dem Rande zulassen.

Bey der grossen Vollkommenheit zu der man es jetzt in der Eintheilung winkelmessender Werkzeuge gebracht hat (§. 89. XIX.) zieht man aber jetzt kleinere Werkzeuge, die aus einem ganzen Kreise bestehen, den grössern oft unbehülflichen Quadranten von zwey und mehreren Fußen im Halbmesser, deren man sich sonst zu den grössern geographischen Operationen bedient hat, in mehreren Rücksichten vor, und nur bey kleinern Feldmesserarbeiten, mag man sich allenfalls eines Quadranten von ½ oder 1 Fuß im Halbmesser bedienen, wenn man dadurch glaubt etwa die Kosten eines ganzen Kreises zu ersparen, und die grössere Mühe nicht achtet, die die Quadranten verursachen, wenn Winkel mit ihnen gemessen werden sollen, welche über 90° gehen, und daher theilweise gemessen werden müssen.

Noch einige Betrachtungen über die Eintheilung der Winkelmesser.

§. 92. 1. Die Theilung eines Kreises in 360 Theile, oder eines Quadranten in 90, ist schon seit langer Zeit eingeführt, und bey geometrischen Werkzeugen fast keine andere bisher gebraucht worden. Bey astronomischen Werkzeugen pflegt man heut zu Tage auch sehr oft den Quadranten in 96 Theile zu theilen.

Diese Eintheilung empfiehlt sich dadurch, daß sie sogleich durch eine fortgesetzte Halbirung des Bogens von 60° (§. 89. IV) erhalten werden kann. Denn es ist

$$\frac{1}{96} \cdot 90^\circ = \frac{1}{3.2.2.2.2.2} \cdot 90^\circ$$

$$= \frac{60^\circ}{2.2.2.2.2.2}$$

Man darf also den Bogen von 60° nur sechsmahl nach einander halbiren, um den 96ten Theil des Quadranten zu erhalten, und dieses Halbiren ist leichter und richtiger auszuführen, als irgend eine andere Art von Eintheilung.

2. Man kann aber sehr leicht di[illegible] Theile des Quadranten, auf die gewöhnl[illegible] Theile oder Grade reduciren. Da [illegible] = 96 15 ist, so läßt sich leicht $\frac{2}{96}$ [illegible]

und so überhaupt jedes Vielfache von $\frac{1}{96}$. 90° oder von 56′ 15″ berechnen, und in eine Tafel bringen, die nachher dazu dienen kann, einen Winkel, der in 96 Theilen des Quadranten, oder in 384 Theilen des ganzen Umkreises bekannt ist, durch die gewöhnlichen Theile eines Kreises, nämlich durch Grade und Minuten auszudrücken.

3. Zugleich können auch beyde Arten von Eintheilungen, die man an einem geometrischen Werkzeuge auf zwey koncentrischen Kreisen anbringt, einander wechselseitig zur Prüfung, und selbst auch zur genauern Ausmessung eines Winkels dienen, wie in der Folge erhellen wird.

4. Die wesentliche Eigenschaft eines guten Winkelmessers besteht in der möglichst genauen Gleichheit der Theile auf dessen Rande: Es mögen nun diese Theile entweder gewöhnliche Grade, oder auch von jeder andern willkührlichen Größe seyn, wenn man nur ihren Werth in gewöhnlichen Graden weiß.

Nun lehrt die Erfahrung, daß es weit leichter ist, auf eine unbestimmte gerade Linie
Kreisbogen eine gewisse Anzahl will-
cher gleich großer Theile abzusetzen,
lehrt einen Bogen von gegebener
eine bestimmte Anzahl gleicher

Noch einige Betrachtungen über die Eintheilung der Winkelmesser.

§. 92. 1. Die Theilung eines Kreises in 360 Theile, oder eines Quadranten in 90, ist schon seit langer Zeit eingeführt, und bey geometrischen Werkzeugen fast keine andere bisher gebraucht worden. Bey astronomischen Werkzeugen pflegt man heut zu Tage auch sehr oft den Quadranten in 96 Theile zu theilen.

Diese Eintheilung empfiehlt sich dadurch, daß sie sogleich durch eine fortgesetzte Halbirung des Bogens von 60° (§. 89. IV) erhalten werden kann. Denn es ist

$$\frac{1}{96} \cdot 90^\circ = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 90^\circ$$
$$= \frac{60^\circ}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Man darf also den Bogen von 60° nur sechsmahl nach einander halbiren, um den 96ten Theil des Quadranten zu erhalten, und dieses Halbiren ist leichter und richtiger auszuführen, als irgend eine andere Art von Eintheilung.

2. Man kann aber sehr leicht die 96 Theile des Quadranten, auf die gewöhnlichen 90 Theile oder Grade reduciren. Da $\frac{1}{96} \cdot 90^\circ = 56' 15''$ ist, so läßt sich leicht $\frac{2}{96} \cdot 90^\circ$, $\frac{3}{96} \cdot 90^\circ$ und

und so überhaupt jedes Vielfache von $\frac{1}{96} \cdot 90^\circ$ oder von 56′ 15″ berechnen, und in eine Tafel bringen, die nachher dazu dienen kann, einen Winkel, der in 96 Theilen des Quadranten, oder in 384 Theilen des ganzen Umkreises bekannt ist, durch die gewöhnlichen Theile eines Kreises, nämlich durch Grade und Minuten auszudrücken.

3. Zugleich können auch beyde Arten von Eintheilungen, die man an einem geometrischen Werkzeuge auf zwey koncentrischen Kreisen anbringt, einander wechselseitig zur Prüfung, und selbst auch zur genauern Ausmessung eines Winkels dienen, wie in der Folge erhellen wird.

4. Die wesentliche Eigenschaft eines guten Winkelmessers besteht in der möglichst genauen Gleichheit der Theile auf dessen Rande: Es mögen nun diese Theile entweder gewöhnliche Grade, oder auch von jeder andern willkührlichen Größe seyn, wenn man nur ihren Werth in gewöhnlichen Graden weiß.

Nun lehrt die Erfahrung, daß es weit leichter ist, auf eine unbestimmte gerade Linie oder Kreisbogen eine gewisse Anzahl willkührlicher gleich großer Theile abzusetzen, als umgekehrt einen Bogen von gegebener Größe, in eine bestimmte Anzahl gleicher

 Theile

Theile zu theilen, wie z. E. den Quadranten genau in 90 gleiche Theile.

Man könnte daher einen aus freyer Hand sehr richtig eingetheilten Winkelmesser mit leichter Mühe auf folgende Art erhalten.

Auf einen Kreisbogen, den man auf einer metallenen Platte gerissen hat, setze man eine gewisse Anzahl willkührlicher kleiner Theile von gleicher Größe, so oft an einander, bis man einen Bogen von beträchtlicher Größe, z. B. beynahe einen Quadranten oder Halbkreis u. s. w. bekömmt. Diesen Bogen, auf dem sich solchergestalt lauter vollkommen gleiche Theile befinden, gebrauche man zu einem Winkelmesser.

Nur muß man vorher die eigentliche Große dieses Bogens in gewöhnlichen Theilen des Kreises, nämlich in Graden und Minuten u. s. w. wissen, ehe man ihn würklich zu Winkelmessungen braucht. Ich werde in der Folge einige Mittel angeben, wie man sehr leicht und zuverlässig den Werth eines solchen Bogens bestimmen könne.

5. Gesetzt also, auf einen Kreisbogen von einem gegebenen Halbmesser, habe man nach der Ordnung 86 willkührliche gleich große Theile gesetzt, und diese 86 Theile betrügen nach

an-

angestellter Untersuchung einen Bogen von 95° 7′ oder von 5707′, so würde ein solcher Theil = 1° 6′ 21″, 62 seyn.

Wenn man also hievon die vielfachen bis aufs 86fache berechnete, und in eine Tafel brächte, so könnte man alsdann sehr leicht einen jeden Winkel oder Bogen, der in solchen 86 Theilen, die sich auf dem Rande des Werkzeugs befinden, gegeben ist, auf gewöhnliche Grade und Minuten u. s. w. reduciren, wie in (2).

6. Diese Methode, einen Winkelmesser einzutheilen, hat schon Römer bey astronomischen Werkzeugen angebracht (Horrebow *Op. Math. Tom. III. Cap. V.* §. 57. 58.) und sie verdiente würklich, daß man von ihr in der Ausübung mehreren Gebrauch machte, da sie mit so viel Bequemlichkeit und Genauigkeit verrichtet werden kann. Die einzige Vorsicht ist nur diese, daß man beym Auftragen dieser willkührlich kleinen Theile, im Einsetzen der Zirkelspitzen keine Fehler begehe, und immer genau dieselbe Weite zwischen beyden Zirkelspitzen behalte; Dieses wird sich aber in der Ausübung sehr leicht bewerkstelligen lassen, wenn man sich hiezu eines ganz kleinen Stangenzirkels, dessen Spitzen sehr scharf, hart, und konisch zulaufend sind, und sich fest in den gehörigen Abstand stellen lassen, oder auch eines

Federzirkels, bedient, Uebrigens ist die kleine Mühe, die willkührlichen Theile des Randes in die gewöhnlichen Grade und Minuten jedesmahl zu verwandeln, sehr unbeträchtlich gegen den Vortheil, auf eine so leichte Art einen sehr richtig eingetheilten Winkelmesser zu erhalten.

7. Um den Kreisbogen, auf welchen die willkührlichen Theile aufgetragen werden, so zu ziehen, daß sein Mittelpunkt, wie sichs gebührt, dem Umdrehungspunkt der Alhidadenregel (m. s. unten §. 93.) entspreche, so soll nach Römers Methode dieser Kreisbogen erst gezogen werden, nachdem die Alhidadenregel schon um den Mittelpunkts-Zapfen des Werkzeugs selbst angebracht ist. Durch eine leicht zu erdenkende Vorrichtung befestigt man an die Seite der Alhidadenregel einen spitzigen Stift, welcher durch Hülfe eines mässigen Drucks einen sanften Bogen auf dem Rande des Winkelmessers beschreibt, wenn die Alhidade herum geführt wird. Auf diesen Bogen, der sich nachher leicht wieder wegpoliren läßt, werden alsdenn die willkührlichen Theile aufgetragen.

Es ist diese Art den Kreisbogen durch die Bewegung der Alhidadenregel selbst zu beschreiben überhaupt auch bey jeder Theilungsmethode zu empfehlen. Weil aber bey diesem Verfahren der Halbmesser des Kreisbogens sich nicht it abnehmen läßt, so erhellet, daß man als-

dann

dann z. B. in §. 89. IV. den Umkreis durch Versuche in 6 gleiche Theile wird theilen müssen, um nachher die weiteren Abtheilungen a. a. O. zu erhalten.

Uebrigens kann man die Alhidade auch so einrichten, daß sich längs ihr selbst die Theilstriche ziehen lassen, wenn man es nicht bey einer bloßen Theilung mit Punkten bewenden lassen will, welche Römer derjenigen mit Theilstrichen vorzieht.

8. In der Ausübung könnte man die (4) erwähnten willkührlichen Theile etwa so groß nehmen, daß 90 von ihnen einen Bogen ausmachten, der nicht sehr von gewöhnlichen 90 Graden abwiche. Man könnte auch einen Vernier anbringen, der die erdichteten Grade (gradus ficti) auf dem Rande, noch weiter in kleinere Theile eintheilte.

Ich habe mich durch mehrere Proben versichert, daß bey diesem Verfahren Römers, die kleinen Fehlerchen im Absetzen der Theile, sich unmerklich gegen einander aufheben, wenn man ohnabgesetzt, mit beständiger Umwendung des Zirkels, die Theile aufträgt; Es versteht sich, daß der Rand hinlänglich geebnet seyn muß.

Es verhält sich hier beym Absetzen solcher Theile anders, als in dem Falle, wo die gleichen Theile nicht willkührlich genommen werden (wie §. 69. VII).

Die beweglichen Diopteru an dem Winkelmesser.

§. 93. 1. Wenn man die Vorrichtung so macht, daß sich um den Mittelpunkt eines eingetheilten Kreises ein Linial bewegen kann, an dessen beyden Enden senkrecht auf dasselbe ein paar Linien aufgerichtet sind, längs denen man nach einem gewissen Gegenstande hinaus visiren, und dadurch die Richtung einer durch den Gegenstand und den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises eingebildeten Verticalebene bestimmen kann, so heißt dieses Linial ein Absehelinial, eine Alhidadenregel.

2. Die nähere Einrichtung davon zeigt Fig. XLVIII. Tab. III.; daselbst ist A der Mittelpunkt des eingetheilten Randes. Durch ihn geht ein Zapfen, um den das Linial DD beweglich ist. eBe, eie, sind zwey senkrecht auf die Ebene des Linials aufgerichtete messingene Plättlein oder Absehen (Diopteru).

3. Die Oculardiopter eie, hinter welche das Auge O zu liegen kömmt, hat längs der Mitte herunter, senkrecht auf die Ebene

Ebene des Linials, einen zart eingeschnittenen Spalt oder Schlitz id, durch welchen das Auge zielet. Die Objectivdiopter eBe, hat aber eine etwas weitere Oefnung, durch die der Länge herunter, ein zarter Silberfaden Bb, oder Pferdehaar ausgespannt ist. Der Schlitz id, und der ausgespannte Faden Bb müssen genau in einer Ebene liegen, die man sich durch den Mittelpunkt A, auf die Fläche des Linials senkrecht aufgerichtet, vorstellet.

4. Wenn also auf diese Art DD horizontal liegt, so sind id, Bb, vertical, und das Auge, welches durch id visiret, und von dem Faden Bb einen gewissen Gegenstand bedeckt siehet, liegt alsdann in einer Verticalebene idBb, die erweitert, auch durch den Gegenstand gehen würde. Diese Verticalebene idBb nenne ich die dioptrische Ebene (planum dioptricum).

5. Sie gehet durch den Mittelpunkt A, und ihre Durchschnittslinie mit der Ebene des Linials, oder db, heißt die Alhidade, (Ziel- oder Visirlinie).

6. Oft ist die Einrichtung so gemacht, daß die Schärfe des Linials DD, selbst die Alhidade ist.

7. Gewöhnlich sind die Diopteren, bey ee, ee, um Gelenke beweglich; damit man sie auch auf die Regel DD niederlegen könne.

Gebrauch der Dioptern.

§. 94. Wenn die dioptrische Ebene Fig. XLVIII. nach einem gewissen Gegenstande hingerichtet ist, folglich dem Auge O, das Object von dem Faden Bb der Diopter bedeckt zu seyn scheint, so bemerke man auf dem Rande den Theilstrich m, welchen die Regel DD abschneidet.

Hierauf wende man die Alhidadenregel herum, und richte die dioptrische Ebene nach einem zweyten Objecte; $\eta\delta B\beta$ sey jetzt die Lage der dioptrischen Ebene, in der der Gegenstand erscheine, so ist der Bogen ms, oder auch μw, welchen die Visirlinien db, $\delta\beta$, auf dem Rande zwischen sich fassen, das Maaß des Winkels $bA\beta$, um welchen die Alhidadenregel herumgedrehet worden, und wenn die Ebene des Werkzeugs horizontal ist, so ist zugleich der nur genannte Bogen ms oder μw, das Maaß des Neigungswinkels, den ein paar Verticalflächen mit einander machen würden, die man sich durch den Mittelpunkt des Werkzeugs, und die beyden Objecte, nach denen man hinvisiret hat, einbildet.

Es versteht sich, daß während der Herumdrehung der Alhidadenregel, die Ebene des eingetheilten Randes in unverrückter Lage geblieben seyn muß. Die Art, wie dieses zu erhalten, wird in der Folge, bey vollständiger Beschreibung eines Winkelmessers, erhellen.

Noth-

Nothwendige Eigenschaften der Dioptern.

§. 95. I) Der Schlitz ic in der Ocu- lardiopter darf nicht zu enge, aber auch nicht zu weit seyn. Im ersten Falle hält es schwer, Gegenstände, die nicht sehr stark erleuchtet sind, deutlich zu erkennen, und aufzusuchen. Im andern Falle giebt es eine Parallaxe, das will sagen, wenn der Schlitz zu weit ist, so wird einem Auge hinter ihm, ein gewisses Object von dem Faden der Objectivdiopter bald bedeckt zu seyn scheinen, bald nicht, je nachdem man das Auge ein wenig mehr rechts oder links hält. Einige machen deswegen den Schlitz zwar enge, geben ihm aber der Länge herunter verschiedene kleine runde Löcher, die mehreres Licht durchlassen, und zu bequemerer Aufsuchung der Gegenstände dienen.

Man visiret erst durch ein solches Loch, suchet das Object, nach welchem man visiren will, auf, und dreht dabey die Alhidadenregel herum, bis in dem Faden der Objectivdiopter, wenigstens erst ohngefähr, der Gegenstand erscheint. Hierauf zielt man durch den engern Theil des Schlitzes, und richtet, vermittelst einer geringen Verrückung der Alhidadenregel, den Faden der Objectivdiopter, völlig genau nach einem gewissen bestimmten Punkte des Objects.

II)

II) Der Faden B b muß jederzeit wohl gespannt seyn; die gewöhnlichste Vorrichtung ist, ihn durch ein Schräubchen anzuziehen.

III) Es ist gut, wenn die Diopteren ziemlich hoch sind, um nach erhabenen Gegenständen desto bequemer visiren zu können. Aber je höher sie sind, desto nothwendiger ist es, daß Schlitz und Faden genau in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene liegen.

IV) Eine andere wesentliche Bedingung ist, daß sich die Alhidadenregel genau um den Mittelpunkt des eingetheilten Randes drehe; Man begeht sonst in einigen Fällen einen merklichen Fehler, wenn man den von der Alhidade auf dem Rande durchlaufenen Bogen ms oder μw für das Maaß des Winkels μAw, um welchen die Alhidade gedrehet worden, annimmt. Was diese Excentricität eines Winkelmessers schaden kann, läßt sich durch folgende Betrachtungen einigermaaßen übersehen.

Fehler bey Ausmessung der Winkel, wenn die Alhidadenregel sich um einen Punkt drehet, der nicht genau der Mittelpunkt des Werkzeugs ist.

§. 96. 1. Es sey der Kreis Fig. XLIX. Tab. III. der eingetheilte Rand des Winkelmessers; C dessen wahrer Mittelpunkt; c der

Punkt,

Punkt, um den sich die Alhidadenregel beweget; o sey der Punkt auf dem Rande, von welchem die Theilung angerechnet wird.

2. Gesetzt nun, die Alhidade co ziele nach einem gewissen Gegenstande hin, und werde nun herumgedreht, bis sie in der Lage cA nach einem zweyten Objecte hingerichtet sey, so ist zwar der Winkel ocA, derjenige, welchen die beyden Gegenstände mit einander machen, aber der Bogen oA, ist nicht das Maaß dieses Winkels, weil c nicht der Mittelpunkt des Randes ist. Man begeht also einigen Fehler, wenn man nurgedachten Bogen, für des Winkels ocA Maaß annehmen wollte; Er ist eigentlich des Winkels oCA Maaß.

3. Um soviel also die beyden Winkel oCA, ocA von einander unterschieden sind, soviel beträgt der von der Excentricität des Werkzeugs herrührende Fehler.

4. Es sey also der auf dem Rande gefundene Bogen oA, oder der zugehörige Winkel oCA = φ.

5. Um die Lage des Punktes c zu bestimmen, muß gegeben seyn, dessen Abstand Cc vom wahren Mittelpunkte C, und der Winkel cCo, welchen Cc mit dem durch den Ersten Theilpunkt o gehenden Halbmesser Co macht.

Es sey daher Cc = c; cCo = α, und der Halbmesser Co = r.

6. Ich suche den Unterschied (3) nämlich ocA — oCA, dieses ist der Fehler, dessen Größe verlangt wird.

7. Diesen findet man so: In dem Dreyecke ocm ist der äussere Winkel omA = ocm + com und eben so omA = oCA + CAm; Daher

8. ocm — oCA = CAm — com.

9. Nun ist im Dreyecke cCo gegeben; Cc = c; cCo = α, Co = r; daraus findet sich

$$\text{tang coC} = \frac{c \sin \alpha}{r - c \cos \alpha} \text{ (Trig. S. XXII)}$$

weil aber der Winkel coC gewiß in jedem Falle nicht sehr groß seyn wird, wenn anders das Werkzeug nicht gar zu fehlerhaft ist, so kann man ohne merklichen Fehler bloß setzen:

$$\text{coC} = \frac{c \sin \alpha}{r - c \cos \alpha} \text{ (Trig. S. VII)}$$

10. Eben so ist in dem Dreyecke CAc bekannt Cc = c; CA = r; cCA = $\varphi + \alpha$; und daher tang CAm = $\frac{c \sin(\alpha + \varphi)}{r - c \cos(\alpha + \varphi)}$;

oder

oder aus eben dem Grunde, wie vorhin (9)

$$CAm = \frac{c \sin(\alpha + \varphi)}{r - c \cos(\alpha + \varphi)}$$

11. Also (9. 10.)

$CAm - coC$ oder (8)

$ocm - oCA$

$$= \frac{c \sin(\alpha + \varphi)}{r - c \cos(\alpha + \varphi)} - \frac{c . \sin \alpha}{r - c \cos \alpha}$$

12. Weil nun c in Vergleichung mit r sehr klein ist, so kann man die Glieder $c . \cos(\alpha + \varphi)$, $c . \cos \alpha$ im Nenner, ohne merklichen Irrthum weglassen, und bloß setzen

$$ocm - oCA = \frac{c(\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)}{r}$$

13. Weil $\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha = 2 . \cos \frac{1}{2}(\alpha + \varphi + \alpha) . \sin \frac{1}{2}(\alpha + \varphi - \alpha) = 2 . \cos(\frac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \frac{1}{2}\varphi$ ist. (Trig. S. XIII. 12), so wird auch

$$ocm - oCA = \frac{2c}{r} . \cos(\frac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \frac{1}{2}\varphi$$

welches sich sehr leicht durch Logarithmen berechnen läßt. Nur ist hiebey noch zu bemerken, daß die Formel $\frac{2c}{r} . \cos(\frac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \frac{1}{2}\varphi$, den

Bo

Es sey daher Cc = c; cCo = α, und der Halbmesser Co = r.

6. Ich suche den Unterschied (3) nämlich ocA — oCA, dieses ist der Fehler, dessen Größe verlangt wird.

7. Diesen findet man so: In dem Dreyecke ocm ist der äussere Winkel omA = ocm + com und eben so omA = oCA + CAm; Daher

8. ocm — oCA = CAm — com

9. Nun ist im Dreyecke cCo gegeben; Cc = c; cCo = α, Co = r; daraus findet sich

$$\text{tang coC} = \frac{c \sin \alpha}{r - c \cos \alpha} \text{(Trig. §. XXII)}$$

weil aber der Winkel coC gewiß in jedem Falle nicht sehr groß seyn wird, wenn anders das Werkzeug nicht gar zu fehlerhaft ist, so kann man ohne merklichen Fehler bloß setzen:

$$\text{coC} = \frac{c \sin \alpha}{r - c \cos \alpha} \text{(Trig. §. VII)}$$

10. Eben so ist in dem Dreyecke CAc bekannt Cc = c; CA = r; cCA = φ + α; und daher tang CAm = $\frac{c \sin (\alpha + \phi)}{r - c \cos (\alpha + \phi)}$;

oder

oder aus eben dem Grunde, wie vorhin (9)

$$CAm = \frac{c \sin(\alpha + \varphi)}{r - c \cos(\alpha + \varphi)}$$

11. Also (9. 10.)

$$CAm - coC \text{ oder } (8)$$

$$ocm - oCA$$

$$= \frac{c \sin(\alpha + \varphi)}{r - c \cos(\alpha + \varphi)} - \frac{c . \sin \alpha}{r - c \cos \alpha}$$

12. Weil nun c in Vergleichung mit r sehr klein ist, so kann man die Glieder $c . \cos(\alpha + \varphi)$, $c . \cos \alpha$ im Nenner, ohne merklichen Irrthum weglassen, und bloß setzen

$$ocm - oCA = \frac{c (\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)}{r}$$

13. Weil $\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha = 2 . \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi + \alpha) . \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi - \alpha) = 2 . \cos(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \tfrac{1}{2}\varphi$ ist. (Trig. S. XIII. 12), so wird auch

$$ocm - oCA = \frac{2c}{r} . \cos(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

welches sich sehr leicht durch Logarithmen berechnen läßt. Nur ist hiebey noch zu bemerken, daß die Formel $\frac{2c}{r} . \cos(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha) \sin \tfrac{1}{2}\varphi$, den

Vo-

Bogen, welcher den Unterschied der beyden Winkel ocm — oCA misset, in Decimaltheilen des Sinus totus angiebt. Will man den Winkel ocm — oCA sogleich in Secunden ausdrücken, so muß man die gedachte Formel noch mit der Zahl 206264 multipliciren, dann wird

$$ocm - oCA = ocA - \varphi =$$

$$\frac{2c}{r} \cos\left(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha\right) \sin \tfrac{1}{2}\varphi \, . \, 206264''.$$

14. Auf diese Art giebt also die gefundene Formel die Anzahl von Secunden an, die man zu dem Winkel φ, oder dem Bogen oA addiren muß, wenn man den wahren Winkel ocA finden will, um welchen die Alhidade herumgedreht worden. Addirt man diese Anzahl von Secunden nicht hinzu, sondern nimmt für den Winkel ocA bloß den Bogen oA $= \varphi$ zum Maaß an, so begeht man einen Fehler, der so groß ist, so viel der Werth $\frac{2c}{r} \cos\left(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha\right)$ $\sin \tfrac{1}{2}\varphi \, . \, 206264$ Secunden beträgt.

15. Es sey der Bogen oA oder $\varphi = 20°$; α $= 10°$; $c = 1$; $r = 1000$, also $\frac{2c}{r} = 0,002$ Mithin $\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha = 20°$; $\tfrac{1}{2}\varphi = 10°$. also

10

$$\log \frac{2c}{r} = \log 0{,}002 = 0{,}30103 - 3$$
$$\log \cos(\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha) = \log \cos 20^\circ = 9{,}97298 - 10$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \log \sin 10^\circ = 9{,}23967 - 10$$
$$\log 206264 = 5{,}31442$$

Summe der Log. $= 1{,}82810$;

hierzu gehört die Zahl $67''{,}3$ oder $1'\,7''{,}3$ so groß wäre also der Fehler, den man unter den angenommenen Umständen begienge, wenn für das Maaß des Winkels ocA, der Bogen oA $= 20^\circ$ angenommen würde.

Der wahre Winkel ocA wäre eigentlich $= 20^\circ.\,1'.\,7''{,}3$.

Wann bey einer gegebenen Excentricität Cc = c; und cCo = α, der Fehler am größten wird?

16. Dieses läßt sich sogleich aus der ersten Formel (12)

$$\text{ocm} - \text{oCA} = \frac{c}{r}\,(\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)$$

beurtheilen.

17. Da in dem Factor $\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha$, der Winkel α beständig ist, so wird $\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha$ am größten, wenn $\sin(\alpha + \varphi) = 1$, also $\alpha + \varphi = 90^\circ$, mithin $\varphi = 90^\circ - \alpha$ ist.

18. In diesem Falle wird also der Fehler,

$$ocm - oCA = \frac{c}{r}\,(1 - \sin\alpha)\,.\,206264''$$

oder wegen $1 - \sin\alpha = 2\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2$ auch

$$ocm - oCA = \frac{2c}{r}\,.\,\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2\,.\,206264''.$$

(Tr. S. XIV. 26.).

19. Wenn der Winkel $\alpha + \varphi$ über 180° geht, so ist $\sin(\alpha + \varphi)$ am größten, wenn $\alpha + \varphi = 270^\circ$ mithin $\sin(\alpha + \varphi) = -1$ wird.

20. Dann ist der größte Fehler

$$ocm - oCA = \frac{c}{r}\,(-1 - \sin\alpha)\,.\,206264'' =$$

$$-\frac{c}{r}\,(1 + \sin\alpha)\;206264''$$

oder wegen $1 + \sin\alpha = 2\sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2$

$$ocm - oCA = -\frac{2c}{r}\,\sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2\,.\,206264''.$$

21. (Ex. In dem Exempel (15) war angenommen worden $\alpha = 10^\circ$. Folglich ist der Fehler 2mahl am größten, erstlich für

$\varphi = 90^\circ - \alpha = 80^\circ$ (17),

zweitens für $\varphi = 270^\circ - \alpha = 260^\circ$ (19).

Für den ersten Fall (18) wird

$$\log \frac{2c}{r} = 0{,}30103-3$$

$$\log \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2l\sin 40^\circ = 19{,}61612-10$$

$$\log 206264 = 5{,}31442$$

Summe der Log. = 2,23157

hierzu gehöret die Zahl 170″, 4 oder 2′-50″, 4 beynahe = 3′.

Da wäre also, für den Bogen oA = 80°, der Fehler = 2′. 50″, 4, wenn man oA für des Winkels ocA Maaß annähme; der wahre Winkel ocA aber = 80°. 2′. 50″, 4.

22. Für den 2ten Fall $\varphi = 260^\circ$ wird

$$\log \frac{2c}{r} = 0{,}30103-3$$

$$\log \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2l\sin 50^\circ = 19{,}76850-20$$

$$\log 206264 = 5{,}31442$$

Summe der Log. = 2,38395;

hierzu gehöret die Zahl 242″, 1 oder 4′. 2″, 1.

Da wäre also der Fehler = —4′. 2″, 1 und der wahre Winkel ocA = 260° — 4′. 2″, 1 = 259°. 55′. 57″, 9.

23. Hieraus erhellet, daß, wenn $\varphi = 80^\circ$ wird, also die Alhidade, von dem Theilpunkte o angerechnet, einen Bogen oA von 80° durch-

laufen hätte, der wahre Winkel ocA, um welchen sich die Alhidade herum beweget hat, um 2′ 50″, 4 zu klein angegeben würde, wenn man für dessen Maaß, den Bogen oA = 80° annehmen wollte.

Im Gegentheil würde man den wahren Winkel ocA um 4′ . 2″, 1 zu groß angeben, wenn der Bogen oA, den die Alhidade durchlaufen hat, 260° wäre.

24. Da demnach bey einer Excentricität, wo Fig. XLIX. cC nur = $\frac{1}{1000}$ des Halbmessers, und der Winkel cCa = 10° wäre, bey Ausmessung der Winkel mit einem solchen Werkzeuge, schon ein Fehler begangen werden kann, dessen Größe sich auf 4′ . 2″, 1 beläuft, so zeigt dieses die Nothwendigkeit, daß die Alhidadenregel genau um den Mittelpunkt des eingetheilten Randes beweglich sey.

Noch ist zu erinnern, daß in (5. 6.) angenommen worden, Cc falle ausserhalb des Winkels oCA, oder die Winkel cCo = α und oCA = φ, auf verschiedenen Seiten der Linie Co; lägen beyde auf einerley Seite von Co, so muß in obigen Formeln α negativ genommen werden.

25. Wüßte man c und α, so liesse sich freylich nach der Formel (13) für jedes φ, oder

oder für jeden Bogen o A auf dem Rande, die Größe des Fehlers berechnen; allein, es hält in der That schwer, bey einem gegebenen Winkelmesser die Untersuchung anzustellen, ob er etwas excentrisch sey, und wie groß o, und α sind. Es ist deswegen nothwendig, daß der Verfertiger eines Winkelmessers gleich anfangs alle mögliche Sorgfalt anwende, die Bewegung der Alhidadenregel um den wahren Mittelpunkt zu veranstalten.

26. Dieß zu erhalten, ist dem (§. 89.) gewiesenen Theilungsverfahren, noch eine sehr nöthige Erinnerung beyzufügen, welche ich im 2ten Theile dieser practischen Geom. §. 169. angeführt habe.

Fernröhre statt der Dioptern.

§. 97. Man hat ehemals fast blos das bisher beschriebene Diopterlinial bey Winkelmessern angebracht. Auch noch heut zu Tage findet man dessen Gebrauch häufig; z. E. beym Meßtische u. s. w.

1. Ueberhaupt haben aber Dioptern, besonders für Kurzsichtige, die Unvollkommenheit, daß man durch sie nach entfernten Gegenständen nicht sehr genau und sicher visiren kann.

2. Man bringt daher, statt der Dioptern, auf die Alhidadenregel lieber ein Fernrohr an.

Dadurch erhält man den Vortheil, entfernte Objecte nicht nur sehr deutlich, sondern auch vergrößert zu sehen; Statt des bisherigen Fadens in der Objectivdiopter, wird dann in dem Brennpunkte des Fernrohrs, ein Faden ausgespannt, dessen Richtung auf die Fläche der Alhidadenregel senkrecht stehen muß, oder man bringt ein ebenes Glas, worauf eine feine Linie, statt jenes Fadens, eingerissen ist, in den Brennpunkt. Das Fernrohr selbst wird meistens so angebracht, daß dessen Axe sich in einer Ebene befinde, die man sich durch den Mittelpunkt des Werkzeugs, auf die Fläche des Alhidadenlinials senkrecht vorstellt. Die Art aber, wie das Fernrohr mit der Alhidadenregel verbunden wird, werde ich zeigen, wenn ich die nähere Einrichtung eines heut zu Tage gebräuchlichen Winkelmessers beschreibe.

In Leupolds Theatro Machinarum Geom. Tab. XXIX. und Kap. XXIV. findet man eine Menge besonderer Einrichtungen der Dioptern. Die, welche ich (§. 93.) beschrieben habe, ist aber am meisten im Gebrauche. Die übrigen kann man entbehren. Das Diopterlinial beym Gebrauche des Meßtisches hat noch eine etwas andere Einrichtung, als die §. 93. wie in der Folge erhellen wird.

Anmerkung.

§. 98. Die innere Einrichtung der Fernröhre überhaupt muß ich, der Kürze halber, als bekannt zum voraus setzen, so wie auch die nöthigen Sätze aus der Dioptrik, von denen ich etwa in der Folge Anwendung mache. Ich werde indessen keine andern Sätze gebrauchen, als diejenigen, welche in der Dioptrik des Kästnerschen Handbuches der angewandten Mathematik (Götting. 1780.) vorkommen; Da dieses Buch in jedermanns Händen ist, so werde ich mich allezeit auf solches beziehen, wenn ich einen dioptrischen Satz nöthig habe.

Die Fernröhre, die man gewöhnlich bey geometrischen Werkzeugen anbringt, bestehen aus zwey erhaben geschliffenen Gläsern, die man durch Röhren von Messing so miteinander verbindet, daß ihre Axen genau in eine gerade Linie fallen. Die Röhre, in welcher sich das Ocularglas befindet, kann nach Gefallen in die Röhre des Objectivglases, weiter hinein= oder herausgeschoben werden, bis das Auge vor dem Ocularglase die Gegenstände durch das Fernrohr deutlich siehet. (S. Kästn. Diopt. 89. 91.) Durch eine solche Verbindung zweyer Gläser erhält man nicht allein Vergrößerung, sondern auch Deutlichkeit; die Brennweiten der Gläser müssen aber zu dieser

Absicht gewisse Verhältnisse gegen einander haben, die sich aus den Gründen der Dioptrik bestimmen lassen, und dem Mechanikus bekannt seyn müssen, der sich mit Verfertigung der Fernröhre abgiebt. (K. Diopt. 93. 94. 95.) Die Gegenstände erscheinen durch ein solches Fernrohr verkehrt. (K. Diopt. 89.) — Dieses kann aber keine Irrung verursachen, weil man ein Fernrohr an einem Winkelmesser nur dazu braucht, ein entferntes Object deutlich zu sehen, und den im Brennpunkte ausgespannten Faden genauer nach einem gewissen bestimmten Punkte des Objects hinzurichten, als vermittelst bloßer Diopteren geschehen kann. Hiebey ist es nun gleichgültig, ob die Gegenstände aufgerichtet oder verkehrt erscheinen.

Beschreibung eines Winkelmessers.

§. 99. 1. Die Werkzeuge, deren man sich bisher in der practischen Geometrie zum Winkelmessen bedienet hat, sind meistens so beschaffen, daß sie zumahl bey Vermessungen, die etwas ins Große gehen, gar nicht den erforderlichen Grad der Genauigkeit verstatten. Folgendes Werkzeug ist, wie ich glaube, zur Ausübung bequemer und richtiger, als die meisten bisher üblichen. Was aber an der Beschreibung, die ich hievon ertheile, unvollkommen bleiben möchte, wird man leicht aus Betrachtung der Figuren, und durch eigenes Nachdenken ergänzen.

2.

2. Tab. V. Fig. LVIII. ist das Werkzeug von oben anzusehen. Fig. LIX. dessen perspektivischer Aufriß, und Fig. LX. dessen Profil. Es wird gut seyn, bey der folgenden Beschreibung beständig diese Figuren zugleich in Augenmerk zu haben.

Erstlich ist also Fig. LVIII. AAA der eingetheilte Rand des Winkelmessers: Von den Abtheilungen selbst habe ich hier nur die Bogen ke, id angegeben, die man sich leicht um den ganzen Rand herumgezogen, vorstellen kann.

3. Die Abtheilungen auf dem Bogen id mögen solche seyn, dergleichen 96 auf einen Quadranten, mithin 384 auf den ganzen Umfang gehen. Ich werde in der Folge dieses die 96 Theilung des Winkelmessers nennen.

Jeder Bogen zwischen zwey nächsten Theilstrichen, gehöret also am Mittelpunkte einem Winkel von $\frac{1}{96} \cdot 90°$ oder von $56' \, 15''$ zu §. 92.

4. Die Abtheilungen auf ke mögen hingegen gewöhnliche Grade oder 360 Theile des ganzen Umfangs bedeuten.

5. So hat man auf dem Rande zwey von einander unabhängige Eintheilungen, die wie die Folge weisen wird, einander gegenseitig, sowohl zur Prüfung, als auch zu genauerer Ausmessung eines Winkels dienen.

Die beyden ersten Theilstriche i, k, von denen die Abtheilungen angerechnet werden, müssen genau in einer gemeinschaftlichen geraden Linie kic liegen, die durch des Werkzeugs Mittelpunkt c gehet; Die Zahlen, die die Abtheilungen auf dem Rande von 10 zu 10 Theilen weisen, werden, wie die Figur zeigt, von der linken Hand gegen die rechte bey die Theilstriche gesetzt.

6. Die auf einander senkrecht stehenden Querstücken CC, CC, bestehen mit dem eingetheilten Rande aus einem Stück, und vereinigen sich in einer runden Platte rr Fig. LIX, aus deren Mittelpunkte die Kreisbogen auf dem Rande gezogen sind.

7. Ueber dieser runden Platte rr sieht man zwey andere oo, mm. An der oo befindet sich die Alhidadenregel OO Fig. LVIII. mit ihrer Vernier- oder Noniusplatte ln. Diese Vernierplatte ln ist ein auf beyden Seiten scharf ausgekehltes Stück Messing, das von zwey Kreisbogen begränzt wird, die mit dem eingetheilten Bogen des Randes concentrisch

centrisch sind, und auf denen sich die Vernier-abtheilungen befinden, die bey Umdrehung der Alhidadenregel sich längst den Abtheilungen des Randes fortbewegen.

8. Die runde Platte mm besteht mit der Regel P aus einem Stücke. Diese Regel P, welche ich in der Folge den Alhidadenhalter nennen will, und die Alhidadenregel OO, sind an ihren Enden mit zwey sogenannten Ansätzen p, q. versehen, durch welche die Micrometerschraube MK geht. Diese Schraube wird von Stahl verfertigt, und mit sehr feinen doch hinlänglich tiefen und genau gearbeiteten Schraubengängen versehen; die Scheibe M dient, die Schraube MK bequem herumdrehen zu können. Auch befinden sich auf ihr Abtheilungen, die man deutlicher bey Fig. LXI. sehen kann, wo AA ein Stück des eingetheilten Randes, P ein Stück des Alhidadenhalters, und O ein Stück der Alhidadenregel vorstellt. Wozu diese Abtheilungen auf der Scheibe M nützen, wird sobald erhellen. Auch ist an die untere Fläche des Alhidadenhalters ein Aermlein $\mu\nu$ befestigt, an dessen Ende ν sich ein Zeiger oder Weiser erhebt, der bey Umwendung der Micrometerschraube MK, die Abtheilungen auf der Scheibe M andeutet. Dieser Weiser ist nur durch ein Schräubchen an den Alhidadenhalter befestigt, und läßt sich um dies Schräubchen etwas dre-

hen, damit man ihn nach Erforderniß genau über einen Theilstrich der Scheibe M bringen kann.

9. In Fig. LXII. ist die Fig. LXI. in umgekehrter Lage vorgestellt, so wie sie nemlich von unten anzusehen ist. Daselbst ist abcd ein an die untere Fläche des Alhidadenhalters durch das Schräubchen ψ befestigtes Stück Messing, in Form eines Knies, welches sich bis cd über den Rand AA erhebt, und solchergestalt einen Theil des Randes zwischen sich und der Regel P enthält; bey x geht durch das Stück abcd eine Schraube: wenn man diese anziehet, so drückt sie gegen den Rand AA, und erhält solchergestalt den Alhidadenhalter P, folglich auch die Alhidadenregel O, welche vermittelst der Micrometerschraube, mit dem Alhidadenhalter zusammenhängt, fest an den Rand AA: Und eben daher rühret die Benennung Alhidadenhalter. Will man hingegen die Alhidadenregel um den Mittelpunkt des Werkzeugs herumführen, so darf man nur die Schraube x lösen.

10. Bey LXIII. ist die nähere Zusammensetzung der Micrometerschraube zu sehen, KR ist der eigentliche, mit seinen Schraubengängen versehene Theil. Diese Schraubengänge wenden sich bey Herumdrehung der Micrometerschraube, in einer Mutter herum, die h in dem auf der Alhidadenregel O befestigten

ten Ansatze q (8) befindet. KR endigt sich aber in einen etwas dünnern stählernen Zapfen RB. Dieser geht durch den Ansatz p (8) des Alhidadenhalters, und wälzt sich in demselben, wie in einer Pfanne herum. An der Scheibe M befindet sich, senkrecht auf ihr, ein hohler Cylinder D. Wenn nun der Zapfen RB durch den Ansatz p durchgesteckt worden, so daß das dickere Ende R, wo die Schraube KR aufhört, (oder eine bey R angelöthete kreisrunde Scheibe ST) dichte bis vor den Ansatz p stößt, so wird an den Theil RB des Zapfens, welcher alsdann rechter Hand des Ansatzes hervorraget, die Höhlung des Cylinders D gesteckt, so daß die Grundfläche dieses Cylinders ebenfalls dichte bis vor den Ansatz p zu liegen komme, und folglich dem Zapfen kein Spielraum weder von p nach q, noch von q nach p übrig bleibe. Diese Vorrichtung ist deswegen nöthig, weil sonst die Schraube im Anfange nicht angreifen, sondern eine Weile leer gehen würde. Es muß aber die Höhlung des Cylinders D etwas weniges enger seyn, als der Zapfen RB dicke ist, damit eine ziemliche Gewalt erfordert wird, wenn man den Cylinder D an den Zapfen RB stecken will.

Die Absicht davon ist, daß der Cylinder D an dem Zapfen RB, vermittelst einer starken Friction, sehr fest stecke, und folglich, wenn man die Micrometerschraube herumdreh-

der Cylinder D nicht zu gleicher Zeit eine eigene Bewegung um den Zapfen RB habe. Man könnte auch den Cylinder D an den Zapfen vermittelst eines Schräubchens befestigen, so wäre gar keine eigene Bewegung zu befürchten.

Damit sich die Micrometerschraube MK beym Umdrehen nicht klemme, so ist nöthig, daß die Ansätze p, q, dergestalt auf P und O angebracht sind, daß sie sich zugleich mit der Schraube etwas drehen, wozu die Einrichtung den Mechanicis bekannt ist.

Der Ansatz q muß so dick seyn, daß er wenigstens 6 bis 8 Schraubengänge fasse, damit sich die Gänge nicht zu leicht ausschleifen.

11. Der obere Ring I, I, Fig. LVIII ist, wie aus dem Profile *) des ganzen Werkzeugs Fig. LX. zu ersehen ist, vermittelst dreyer Schrauben, an die Alhidadenregel OO befestiget, und um ihn ist die runde Platte mm des Alhidadenhalters (8) beweglich; dieser Ring ist von Stahl.

12.

*) Dieses Profil stellet den Durchschnitt des Werkzeugs vor, wenn man sich einbildet, die Alhidadenregel OO, sey über das Querstück CC gebracht, und hierauf nach ihrer Mitte, ein Schnitt senkrecht auf sie, durch den Mittelpunkt des Werkzeugs geführet worden.

12. Unterhalb der runden Platte rr Fig. LX (6) siehet man noch zwey andere. Die ichste unter rr gehöret zu einer Regel NN, e unter eben dem Buchstaben, auch in dem rofile zu sehen ist. Diese Regel NN ist an rer untern Fläche mit einem Ansatze w verse:n, dergleichen sich auch einer an der untern läche des Querstücks CC, befindet. Durch iese beyden Ansätze gehet die Stellschraube Vz Fig. LVIII, auf eine ähnliche Art, wie urch die beyden Ansätze p, q, die Microme:erschraube MK (10); diese Regel N mit hrer Schraube Wz dienet, dem Rande des Werkzeugs eine sanfte horizontale Bewegung zu geben.

13. Die runde Platte, an der sich NN befindet (12) ist mit der untersten runden Platte, die mit dem hohlen Cylinder R aus einem einzigen Stücke bestehet, vermittelst dreyer Schrauben ψ, ψ, Fig. LX. verbunden.

14. Durch den Mittelpunkt des Werkzeugs gehet ein stählerner etwas konischer Zapfen V. (S. das Profil.) Dieser ist vermittelst dreyer Schrauben, auf die runde Mittelpunkts-Platte der Regel NN (12) befestiget. Um diesen konischen Zapfen drehet sich die Alhidadenregel OO.

15. Senkrecht an diesem Zapfen V befindet sich an dem Mittelpunkt der Grundfläche

desselben, ein zweyter cylindrischer Zapfen y, der mit V aus einem Stücke bestehen muß, und sich in eine konische Spitze endigt.

16. Die Höhlung des Cylinders R wird nun auf eine sogenannte Nuß Fig. LXIV. Tab. VI. gesteckt, und kann vermittelst der Schraube L an dem cylindrischen Zapfen αβ der Nuß (die hier nur klein abgebildet ist) festgehalten werden. Wie eine solche Nuß zusammengesetzt sey, brauche ich kaum zu erläutern, da diese Art der Vorrichtung schon sehr alt, und allen Mechanicis bekannt ist, sich auch einigermaaßen, sowohl aus dem Aufrisse, als dem dabey stehenden Profile deutlich übersehen läßt. Verschiedene Gattungen derselben findet man auch sehr vollstäudig in Leupolds Theatr. Mach. Geom. beschrieben.

Der Zapfen αβ muß aber genau in die innere Höhlung des Cylinders R passen, damit, wenn das Werkzeug auf die Nuß gesetzt wird, nicht die geringste Wankung entstehe. Auch ist aus dieser Ursache bey α noch eine konische Vertiefung, oder eine Pfanne, in welcher die konische Spitze des Zapfens y (15) zu ruhen kömmt. Der Cylinder αβ bestehet mit der massiven Kugel F aus einem Stück, und die Kugel selbst ist in einer sie umgebenden Hülse beweglich. Die Schraube H, die gegen ein an die Kugel F stoßendes Plättchen h drücken

dient

ient, die Kugel oder Nuß in ihrer Hülse unbeweglich zu erhalten, wenn es die Absicht erfordert.

17. Endlich dient der an der Hülse befestigte hohle messingene Cylinder V, die Nuß mit dem auf ihr ruhenden Winkelmesser, auf ein hölzernes Stativ oder Gestelle Fig. LXV, zu setzen. S ist der Zapfen des Stativs, der genau in die Höhlung des Cylinders V passen muß. Diesen Zapfen S kann man besser von Messing, als von Holz seyn lassen. Im erstern Falle wird er durch starke Schrauben auf das hölzerne Stück T befestigt. Die Beine oder Füße des Stativs sind bey e, e, an den Seitenflächen eines hölzernen dreyeckigten Prisma, um Axen beweglich, und können, nach Gefallen, so weit auseinander gesperrt werden, bis das auf dem Stativ ruhende Werkzeug eine bequeme Stellung und Höhe erhalten hat. Uebrigens kann man durch Schraubenmütter, die an den Enden der Axen, um die sich die Beine drehen, angeschroben werden, die Beine des Stativs in eine unverrückte Lage bringen. Auch sind die Beine unten mit sogenannten eisernen Schuhen, nebst einer Stachel versehen, wodurch sie sich in den Boden befestigen lassen.

18. Das Fernrohr Fig. LXVI. Tab. V. läßt sich innerhalb der Hülse K um eine

Axe drehen, und kann nach Gefallen durch die Schrauben d, d, festgehalten werden. Die Hülse K befindet sich an einem sogenannten Zirkelgewinde, oder an einer ändern beliebigen Vorrichtung, um welche das Fernrohr genau in einer Verticalebene auf- und nieder bewegt werden kann. Die ganze Vorrichtung KZT, auf der solchergestalt das Fernrohr ruhet, wird durch 4 Schrauben, die man bey T und Z siehet, auf die Alhidadenregel OO Fig. LVIII. angeschroben. Die Schrauben bey T, Z gehören in die Mütter, die man auf der Alhidadenregel OO bey v, v, v, v, siehet.

Anmerkung.

Dieses ist im Ganzen die wesentliche Einrichtung eines zur Ausübung bequemen Winkelmessers. Was an der bisherigen Beschreibung etwa noch undeutlich seyn möchte, wird sich aus genauerer Betrachtung des Aufrisses und Profiles ergänzen lassen. Den Gebrauch und die Absicht der bisher beschriebenen einzeln Theile dieses Winkelmessers werde ich in der Folge erklären, wenn ich die würkliche Ausmessung der Winkel zeige.

Die Maaße aller einzeln Theile dieses Winkelmessers hier beyzubringen würde zu weitläuftig seyn, und ein geschickter Mechanicus wird die verhältnißmäßige Größe der einzeln Theile schon von selbst auszuwählen, und nach der fest-

festgesetzten Größe des Werkzeugs zu bestimmen wissen. Nur was die Micrometerschraube anbelangt, so muß ich bemerken, daß, wenn der Halbmesser des Werkzeugs 6 Zoll ist, die Micrometerschraube höchstens $2\frac{1}{4}$ Zoll lang, und etwa $1\frac{1}{4}$ Linie dick zu seyn braucht. Die in ihrer Hülse bewegliche Nuß muß wenigstens $1\frac{1}{4}$ Zoll im Diameter haben, wenn das Werkzeug einen gehörig festen Stand haben soll. Die um den Mittelpunkt des Werkzeugs beweglichen Platten mm, oo, u. s. w. können etwa $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser halten, und etwa 1 starke Linie dick seyn. Das Fernrohr (am besten ein achromatisches, Kästners Dioptr. 100. IV.) kann etwas länger als 12 Zoll, oder als der Durchmesser des Werkzeugs seyn. Die Hauptsache ist, daß alles, was sich drehen läßt, recht satt und geschmeidig gehe, und nichts schlottre oder wanke. Manche Theile können auch eine andere Einrichtung bekommen, wenn nur ihr Zweck erfüllt wird, welches alles dem Mechanicus nach Gutbefinden überlassen seyn kann. Verschiedene zu besondern Zwecken noch anzubringende Theile werden gelegentlich in den nächsten Bänden dieser practischen Geometrie vorkommen. Z. B. Libellen u. d. gl.

Anmerkung.

§. 100. Die Art, wie hier die Alhidadenregel um den Mittelpunkt des Werkzeugs

desselben, ein zweyter cylindrischer Zapfen y, der mit V aus einem Stücke bestehen muß, und sich in eine konische Spitze endigt.

16. Die Höhlung des Cylinders R wird nun auf eine sogenannte Nuß Fig. LXIV. Tab. VI. gesteckt, und kann vermittelst der Schraube L an dem cylindrischen Zapfen $\alpha\beta$ der Nuß (die hier nur klein abgebildet ist) festgehalten werden. Wie eine solche Nuß zusammengesetzt sey, brauche ich kaum zu erläutern, da diese Art der Vorrichtung schon sehr alt, und allen Mechanicis bekannt ist, sich auch einigermaaßen, sowohl aus dem Aufrisse, als dem dabey stehenden Profile deutlich übersehen läßt. Verschiedene Gattungen derselben findet man auch sehr vollständig in Leypolds Theatr. Mach. Geom. beschrieben.

Der Zapfen $\alpha\beta$ muß aber genau in die innere Höhlung des Cylinders R passen, damit, wenn das Werkzeug auf die Nuß gesetzt wird, nicht die geringste Wankung entstehe. Auch ist aus dieser Ursache bey α noch eine konische Vertiefung, oder eine Pfanne, in welcher die konische Spitze des Zapfens y (15) zu ruhen kömmt. Der Cylinder $\alpha\beta$ bestehet mit der massiven Kugel F aus einem Stück, und die Kugel selbst ist in einer sie umgebenden Hülse beweglich. Die Schraube H, die gegen ein an die Kugel F stoßendes Plättchen h drücket, dient,

merkt, welche durch ein auf der Alhidadenregel, über dem erwähnten Faden oder Inder angebrachtes Vergrößerungsglas von etwa 2 Zollen in der Brennweite betrachtet werden. Statt eines solchen Fadens, würde noch besser ein feiner Strich auf der untern Seite eines ebenen runden Glases, das sich zugleich mit der Alhidadenregel über den eingetheilten Rand des Werkzeugs bewegt, gedient haben. Ein so feiner Strich verstattet genau die Mitte eines Theilpunktes auf dem Rande zu treffen, wozu auch der feinste Silberfaden noch zu dick ist. Daß mein Vater keinen Vernier angebracht hat, rührt vermuthlich daher, daß es ihm damals an einem geschickten Künstler gefehlt haben mag, dem er das Ziehen der Theilstriche sowohl auf dem Rande, als auf einem Vernier hätte anvertrauen können. Auch war damals überhaupt der Vernier noch nicht so gebräuchlich, zumahl an geometrischen Werkzeugen, als jetzt, da Künstler durch Hülfe ihrer Theilmaschienen, alle hieher gehörigen Arbeiten, mit so viel Leichtigkeit und Richtigkeit ausführen können. Wer also die Gelegenheit hat von einem geschickten Künstler, ein Werkzeug mit einem Vernier zu erhalten, oder in Ermangelung eines solchen sich zutraut, nach dem Verfahren, welches ich unten (§. 102. XV.) beschreiben werde, sich selbst einen solchen Vernier zu zeichnen, dem wird diese Vorrichtung in Verbindung mit der Micrometerschraube eine um so genauere Ausmessung

der Winkel gewähren (§. 103.) als beyde Angaben des V. und der Micrometerschraube einander zu gegenseitiger Vergleichung dienen. Daher ich es denn nicht für unnütz gehalten habe, das Werkzeug meines Vaters, das ich in Rücksicht seiner übrigen Einrichtung zu gewöhnlichen nicht ins zu Große gehenden geodätischen Operationen sehr einfach und bequem gefunden habe, auch noch mit einem Vernier zu versehen, und dadurch überhaupt auch den Gebrauch der Verniere an winkelmessenden Werkzeugen noch mehr zu erläutern, sie mögen nun, wie sie wollen, von den angeführten verschieden seyn.

Ferner ist nun auch das Fernrohr an meines Vaters Werkzeuge nicht in einem Gewinde auf und nieder beweglich, sondern parallel mit der Alhidadenregel auf ihr ohngefähr so befestigt, wie bey dem Werkzeuge Fig. L. Tab. IV. (unten §. 105.) zu sehen ist. Daselbst sind H, H, ein paar Hülsen, die auf die Alhidadenregel AB befestiget sind, in welche genau die cylindrische Röhre des Fernrohres passet, und vermittelst der Schrauben w, w, festgehalten wird. Eben so ein paar Hülsen gedenke man sich auf der Alhidadenregel Fig. LVIII, ohngefähr an den Stellen, wo die Buchstaben O, O stehen, befestiget, und das Fernrohr durchgesteckt, so hat man die Art, wie an meines Vaters Werkzeuge das Fernrohr angebracht ist.

Es hat indessen diese Vorrichtung, bey der das Fernrohr nicht in einem Gewinde auf und nieder beweglich ist, die Unbequemlichkeit, daß man das Fernrohr bey Horizontalvermessungen, nicht zugleich nach erhabenen Objecten hinrichten kann, so, daß die Fläche des Werkzeugs horizontal bliebe, sondern man der ganzen Fläche des Werkzeugs eine Neigung geben muß. Dadurch erhält man an jedem Stande eigentlich nicht den Horizontalwinkel, sondern einen schiefen, wobey man sich die Mühe geben muß, zwey Verticalwinkel zu messen, wenn man den horizontalen durch trigonometrische Rechnung bestimmen will. §. 8.

Mein Vater hat wohl deswegen kein bewegliches Fernrohr, wie Fig. LXVI. angebracht, weil einige Unrichtigkeiten entstehen, wenn das Fernrohr nicht völlig genau in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene auf und nieder beweglich ist. Allein, ein geschickter Mechanicus wird gar leicht diese nöthige Eigenschaft eines beweglichen Fernrohrs, oder sogenannten Kippregel, in ihrer gehörigen Vollkommenheit darstellen können. Es kömmt sehr mit darauf an, daß der cylindrische Zapfen, um den sich die Kippregel dreht, nicht zu schwach gemacht wird. Sind nun ausserdem etwa nach der Einrichtung welche ich im IIten Theil dieser practischen Geom. §. 150 angegeben habe, auch noch Stellschrauben vorhanden.

einer etwa bemerkten Unrichtigkeit in gedachter Bewegung der Kippregel nachgeholfen werden kann, so steht dem Gebrauche dieser nützlichen und fast unentbehrlichen Vorrichtung nichts weiter mehr entgegen.

Wie man übrigens entdecken könne, ob eine Kippregel die gehörige Bewegung in einer Verticalebene habe, oder nicht, zeige ich im 147ten §., woselbst auch von den Fehlern gehandelt wird, die durch eine nicht gehörige Bewegung der Kippregel hervorgebracht werden können.

Bey Höhenmessungen, wo die Ebene des Winkelmessers vertical gestellt werden muß, hat die Kippregel einige Unbequemlichkeiten, so daß es besser ist, wenn das Fernrohr, nach meines Vaters Einrichtung, unbeweglich, und parallel mit der Alhidadenregel, angebracht wird. Man kann indessen beyde Vortheile miteinander vereinigen. Bey Horizontalvermessungen bediene man sich der Kippregel, indem man die Vorrichtung TKZ Fig. LXVI. auf die Alhidadenregel befestigt; bey Höhenmessungen aber nehme man die Vorrichtung TKZ von der Alhidadenregel weg, befestige, statt ihrer, durch Schrauben ein paar Hülsen, wie H, H, Fig. L. auf die Alhidadenregel, und bringe das Fernrohr gehörig an.

Ge-

Gebrauch der Micrometerschraube.

§. 101. I) Man befestige den Alhidadenhalter P an des Winkelmessers Rand AA, vermittelst der oberwähnten Schraube x (Fig. LXII.) und drehe nun (Fig. LVIII) die Micrometerschraube MK herum, so wird sich die Alhidadenregel mit dem darauf befestigten Fernrohre, sanft um den Mittelpunkt des Werkzeugs zu drehen anfangen, und sich der unbeweglichen Regel P nähern, oder sich von ihr entfernen, je nachdem man die Schraube MK links oder rechts umwendet. Diese sanfte Bewegung der Alhidadenregel läßt sich wahrnehmen, wenn man genau auf die beyden Indices α, β, der Vernierplatte siehet, und bemerkt, wie sie beym Umwenden der Micrometerschraube, an andere und andere Theilstriche des Randes kommen.

II) Wenn nun die Schraubengänge auf MK, durchgehends, wie hier erfordert wird, von gleicher Weite sind, so wird bey jeder Umdrehung der Schraube, sich der Index des Vernier um gleich viel auf dem Rande verschieben, und Theile von Umdrehungen der Schraube MK, werden sich verhalten, wie die kleinen Bogen, um die der Index des V. sich auf dem Rande verschiebt, und folglich auch, wie die diesen kleinen Bogen, am Mittelpunkte des Werkzeugs zugehörigen kleinen Winkel.

III)

III) Wüßte man also z. E. daß bey einer gänzlichen Umdrehung der Micrometerschraube, sich der Index des Vernier der 90 Theilung um 12 Minuten auf dem Rande fortbewegte, so würde sich bey einer halben Umdrehung der Index nur um 6 Min. bey einer Viertelsumdrehung um 3 Min. u. s. w. verschieben.

IV) Will man auf diese Art durch die Umdrehung der Schraube, kleine Bogen, um die sich der Index auf dem Rande verschiebt, in Minuten und noch kleinern Theilen angeben, so ist es nöthig, daß man durch einen Versuch vorher die Anzahl von Minuten und Secunden des Randes bestimmt habe, die einer gegebenen Menge von Umdrehungen zugehören.

Diesen Versuch stellet man so an:

V) Man bringe den Index des V. der 90 Theilung, genau an einen gewissen Theilstrich des Randes, und befestige den Alhidadenhalter P.

Nun wende man die Micrometerschraube MK herum, bis der Index des V. an den nächstfolgenden Theilstrich des Randes gerückt ist, und sich also um einen Grad fortbewegt hat.

Man zähle, wie viel ganze Umdrehungen der Micrometerschraube, und wie viel Theile ei-

einer Umdrehung man nöthig hatte, den um einen ganzen Grad fortzurücken.

Dieses Zählen kann man bequem bewerkstelligen, wenn der Umfang der Scheibe M, (Fig. LXI.) die am Ende der Micrometerschraube sitzt, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. E. in 30 derselben getheilt ist. Da darf man nur bemerken, über welchen Theilpunkt der Scheibe M, der über ihr befindliche Weiser v anfangs stand, oder über welchen Theilpunkt man ihn gestellt hat (§. 99. 8) ehe man anfieng, die Schraube herum zu wenden, und wie oft bey Umdrehung der Schraube, derselbe Theilpunkt wieder unter den Weiser kam, so weiß man, wie viel ganze Umdrehungen, und wie viel Theile einer Umdrehung vollendet worden, den Index um einen Grad oder 60′, auf dem Rande fortzuschieben.

Gesetzt, man habe die Micrometerschraube $8\frac{2}{30}$ mahl herumwenden müssen, den Index um den erwähnten Bogen fortzuschieben, so wird man leicht nach der Regel de Tri berechnen können, um wie viel Theile oder Minuten eines Grades sich der Index fortschiebt, wenn man nur eine oder 2 Umdrehungen u. s. w. vollendet. Man schließe hier $8\frac{2}{30}$ Umdreh. geben 1° oder 60′, was giebt 1 Umdrehung?

Antw.

Antw. Beynahe 7′ 20″; also 2 Umdreh. 14′ 40″; ½ Umdrehung 3′ 40″, 5 u. s. w. Ist also der Umfang der Scheibe M in 30 gleiche Theile eingetheilt, so kann man auch 30 Theile einer Umdrehung bemerken, und $\frac{1}{30}$ Umdreh. $= \frac{7' \, 20''}{30} = 14'', 7$; $\frac{2}{30}$ Umdreh. $=$ 29″ 4 u. s. w. Um so viel Secunden schiebt sich also der Index des V. auf dem Rande fort, wenn man die M. Schraube nur um $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$ u. s. w. herumwendet.

VI) Dieses zeigt nun den Nutzen der Micrometerschraube, kleine Bogen oder Winkel, in Minuten und Secunden zu bestimmen. Gesetzt nämlich, der Index des V. stände auf dem Rande zwischen zwey Theilstrichen, z. E. zwischen 20° und 21° und man wollte wissen, um wie viel Minuten er von dem Theilstriche, der zu 20° gehört, entfernt wäre, so verfahre man so:

VII) Man bemerke auf der Scheibe M genau den Punkt, über welchen der Weiser stehet oder schiebe letztere vielmehr genau an einen Theilpunkt der Scheibe M (§. 99. 8) wende nun die Schraube herum, bis der Index an den erwähnten Theilstrich (VI) gerückt ist, und zähle sowohl die ganzen Umdrehungen der Schraube, als auch die Theile von ihr, so wird sich daraus berechnen lassen, um wie viel

Mi-

Minuten der Index anfangs von dem erwähnten Theilstriche des Randes entfernt war.

Gesetzt, man habe die Schraube genau 3 mahl umwenden müssen; so würde der Index rechter Hand des erwähnten Theilstrichs um 3 × 7′ 21″, oder um 22′. 3″ abgestanden haben (V).

VIII) Es ist vortheilhaft, die Werthe der Schraubenumdrehungen, und Theile derselben, ein = für allemal zu berechnen, und sie in eine Tafel zu ordnen, aus der sich nachher sogleich eine gegebene Anzahl von Umdrehungen, in Minuten und Secunden verwandeln läßt.

IX) So zeigt das bisherige den Gebrauch der Micrometerschraube. Ich habe dabey nur noch folgende nöthige Erinnerungen zu machen. (1) Muß man sich beständig eines Vergrößerungsglases bedienen, damit man genau bemerken könne, wenn der Index des V. an einen gewissen Theilstrich des Randes gebracht ist. Es ist bequem, wenn dieß Vergrößerungsglas auf der Alhidadenregel selbst befestigt ist, wozu sich die Vorrichtung leicht gedenken läßt. (2) Muß man untersuchen, ob alle Schraubengänge gleiche Weite haben: hievon überzeugt man sich, wenn man probiret, ob durchgehends gleichviel Umdrehungen nöthig sind, den Index des V. um einen und eben denselben Bogen des Ran-

des zu verschieben. Wenn die Schraube mit dem gehörigen Fleiße gemacht ist, wird man selten merkliche Ungleichheiten entdecken. Auch ist es vortheilhaft, wenn man beständig nur einerley Schraubengänge braucht. (3) Versteht sich, daß die Schraube nur dienen soll, kleinere Winkel oder Bogen zu bestimmen, als unmittelbar auf dem Rande sind.

Für einen größern Bogen müßte die Schraube nach dessen Gestalt gekrümmt seyn: Aber alsdann werden sich die Schraubengänge nicht mit der Gleichheit verfertigen lassen, die hier erforderlich ist. (4) Muß man endlich dafür sorgen, daß die Micrometerschraube MK mit der Richtung der Alhidadenregel O, so viel als möglich, einen rechten Winkel mache.

Eine Hauptsache ist, daß die Micrometerschraube auch auf die geringste Umdrehung rechts oder links so gleich anspreche, d. h. ein Fortrücken des Index auf dem Rande bewürke. Geschieht dieses nicht, so sagt man, daß die Schraube todt oder leer gehe. Dieses leer gehen wird nun zwar eben nicht sehr statt finden, wenn die Schraubengänge tief genug, geschnitten sind, und sonst alles gehörig gearbeitet ist. Um indessen dasselbe noch besser zu verhüten, kann man unter der Micrometerschraube in dem Zwischenraume zwischen dem Alhidadenhalter P und der Alhidadenregel O, auch noch eine

eine etwas starke in Form eines S gekrümmte elastische Stahlfeder anbringen. Sollte aber dennoch zu befürchten seyn, daß die Schraubengänge in einem Ansatze wie q (10) sich mit der Zeit etwas ausschleifen mögten, so kann der Ansatz auch so eingerichtet werden, daß er eine sich selbst federnde Schraubenmutter darstellt, dergleichen den Künstlern unter dem Nahmen der Bremsschrauben bekannt sind, oder es kann ein solcher Ansatz auch aus zwey Theilen bestehen, die durch Hülfe von ein paar Schräubchen zusammengehalten, und nach Erfordern etwas näher zusammengeklemmt werden können, wenn sich die micrometrischen Schraubengänge in ihnen etwas ausgeschliffen haben sollten. Auf diese Art sind die Micrometerschrauben an den Reichenbachischen Werkzeugen (§. 89. XIX) vor allem todten Gange auf immer gesichert. Indessen können denn doch auch gewöhnliche Micrometerschrauben, wenn sie gut eingerichtet sind, auf lange Zeit dienen, und sollten sie einmahl anfangen leer zu gehen, so ist es ein Leichtes sie mit neuen zu vertauschen.

Nähere Vorstellung der Vernierplatte.

§. 102. I) Der Bogen des Vernier für die gewöhnlichen Grade, oder 90 Theile des Quadranten, kann so beschaffen seyn, daß nach (§. 77. X.) der Vernier den Grad von 2 zu 2 Minuten theilet. Es wird also der Bogen

zwischen den beyden äussersten Theilstrichen des Vernier genau zwischen zwey Theilstriche des Randes, die um 31° von einander abstehen, passen müssen. Diesen Bogen des V. wird man genau in 30 gleiche Theile theilen.

Dann wird jeder kleine Bogen zwischen zwey nächsten Theilstrichen des V. um 2′ grösser seyn, als ein Bogen zwischen zwey nächst auf einander folgenden Theilstrichen des Randes, oder bestimmter, jedem Theile des V. gehört am Mittelpunkte ein Winkel zu, der um 2 Min. grösser ist, als der, welcher einem Theile des R. zukömmt.

II) Der Bogen des V. für die 96 Theilung des Quadranten, oder 384 Theilung des ganzen Umfangs, sey 33 solchen Theilen gleich [S. §. 77. XII. unten in der Anmerkung*)] und werde in 32 gleiche Theile getheilt, so wird ein Theil des V. einen Theil des Randes um 1′ 45″, 46 oder etwa um 1′ 45″, 5 übertreffen. Denn wenn $\frac{1}{96}$ des Quadranten $= b$ ist, so wird ein Theil auf dem Vernier $= \frac{33}{32} b$ $= b + \frac{1}{32} b$ folglich um $\frac{1}{32} b$ grösser, als der Theil b zwischen zwey Theilstrichen des Randes. Da nun $b = \frac{1}{96} \cdot 90° = 56' \, 15''$ ist, so wird $\frac{1}{32} b = 1' . 45'', 46$.

III) Berechnet man nun jede vielfache von $\frac{1}{32}$ b, bis aufs 32fache, und bringt sie in eine Ta-

Tabelle, so kann man alsdann sogleich jede vielfache von $\frac{1}{32}$ b, um die der Index des Verniers von einem gewissen Theilstriche des Randes absteht, in Minuten und Secunden ausdrücken, ohne weitere Rechnung. Man s. hievon unten §. 103. ein Beyspiel.

IV) Um übrigens die Abtheilungen auf der Vernierplatte zu verrichten, habe ich folgendes Mittel für gut befunden. Aber alle Handgriffe und Vorsichten dabey zu erzählen, würde zu weitläufig seyn. Ich zeige daher nur kürzlich die Theilung des Vernierbogens für die Gradabtheilungen des Winkelmessers.

V) Ich sehe hiebey zum voraus, daß die Alhidadenregel, mit ihrer Vernierplatte, schon ganz fertig sey, und also nur noch die Abtheilungen auf den Vernierbogen gerissen werden müssen. Um nun dieses zu leisten, so bringe ich die Alhidadenregel gehörig an den Mittelpunkt des Winkelmessers, befestige sie an den Rand des Werkzeugs, indem ich die Schraube x des Alhidadenhalters §. 99. 9. anziehe, und bemerke nun auf zwey um 31° von einander abstehenden Theilstrichen des Randes, genau die Stellen, wo die scharfe Kante des Vernierbogens sie durchschneidet. Ich nehme einen sehr geschärften, und wohl zugespitzten stählernen Punzen, fahre damit genau an der scharfen Kante her, und mache solchergestalt

ganz zarte Einschnitte, auf den erwähnten Theilstrichen des Randes.

VI) So bekömmt man auf ihnen ein paar Punkte, die genau um den Halbmesser des Bogens, der die scharfe Kante des Vernier begränzt, vom Mittelpunkte des Werkzeugs abstehen, und einen Bogen von 31° zwischen sich fassen.

VII) Nun nehme man die Alhidadenregel mit ihrer Vernierplatte vom Mittelpunkte des Winkelmessers ab, befestige sie durch ein paar Handschrauben, oder durch eine sonstige Vorrichtung auf die Scheibe B Fig. XLVII, auf der die Abtheilungen für den Rand des Winkelmessers verfertigt worden §. 89. II.; nehme den geschärften Punzen (V) zur Hand, fahre damit wieder um die scharfe Kante, oder den Vernierbogen herum, und reisse auf diese Art auf der erwähnten Scheibe B einen blinden Bogen rp, genau von eben dem Halbmesser, mit welchem der Vernierbogen gezogen worden.

VIII) Hierauf nehme man die Alhidadenregel wieder weg, und trage auf diesen Bogen von r nach p genau die Weite der beyden Punkte, die in (VI) auf den Theilstrichen des Randes bestimmt worden.

IX) So hat man auf diesem blinden Bogen (VII) genau die Weite rp, um welche die beyden äussersten Theilstriche des Vernier, von einander abstehen müssen; dieser Bogen rp ist genau das Maaß von 31° (VI), und muß nun in 30 Theile getheilet werden.

X) Wie dieses durch halbiren, durch Theilung jeder Hälfte in drey, und eines jeden Drittels wieder in fünf Theile, vermittelst Versuche u. s. w. verrichtet werden könne, dies ist mit Erwägung der dabey nöthigen Vorsichten, oben bey Gelegenheit der Abtheilungen des Randes §. 89. zureichend gezeigt worden.

XI) Wenn nun die Theilung vollendet, und durch zarte Einschnitte oder Punkte sichtbar gemacht worden, so zieht man an jeden Theilpunkt r, s u. s. w. Tangenten. Dieses kann blos mechanisch bewerkstelligt werden, indem man nur ein Linial an die Punkte r, s u. s. w. so anlegt, daß solches den blinden Bogen bey r, s u. s. w. berührt. Diese Tangenten brauchen übrigens nicht ganz bis an die Punkte r, s ausgezogen zu werden, und werden ebenfalls nur durch blindgerissene Linien angedeutet.

XII) Sobald man hiemit fertig ist, nimmt man wieder die Alhidadenregel zur Hand, legt die scharfe Kante des Vernier wieder ge-

 nau

nau an den blinden, und nun getheilten Bogen rp, und befestigt sie durch ein paar Handschrauben, wieder fest auf die Scheibe B.

XIII) Befinden sich nun solchergestalt die Abtheilungen des blinden Bogens pr, genau an der scharfen Kante der Vernierplatte, so kömmt es nun darauf an, durch die Theilpunkte r, s u. s. w. auf die scharfe Kante des anliegenden Vernierbogens, feine, senkrecht stehende Theilstriche zu reissen. Dieses zu leisten, dienen die (XI) gezogenen Tangenten. Man nimmt nämlich einen Stangen- oder Federzirkel zur Hand, bringet die Spitzen desselben in eine bequeme Weite, setzt die eine Spitze genau in den Theilpunkt r, läßt die andere bey z, auf die an r gezogene Tangente hinfallen, und beschreibt auf diese Art, aus dem Mittelpunkte z, einen sehr zarten Einschnitt r 1 auf der anliegenden Vernierkante bis zu einem mit dieser Kante parallel gezogenen Kreisbogen, welcher die Länge der Theilstriche bestimmt. Man behält hierauf immer dieselbe Weite zwischen beyden Spitzen des Zirkels, setzt nun die eine Spitze desselben genau in den Theilpunkt s, läßt die andere wieder in die zugehörige Tangente bey y hinfallen, und reisset aus dem Centro y den nächstfolgenden Theilstrich s 2 auf dem anliegenden Vernierbogen. Auf diese Art setzt man die Arbeit fort, bis durch alle Theilpunkte des blinden Bogens rp, Theilstriche

auf

af die Vernierkante gerissen sind, so hat man, ermittelst dieses Verfahrens, sehr bequem die btheilungen des blinden Bogens auf den Ver- ier gebracht, und man kann nun, von dem inder des Vernier angerechnet, von der rech- n gegen die linke Hand zu, etwa von 5 zu Theilen, Ziffern bey die gerissenen Theilstriche s Vernier stechen lassen.

XIV) Was die Theilstriche selbst anbe- ngt, so brauchen diese höchstens nur ½ oder Linie lang zu seyn. Der erste Theilstrich, r den Index abgiebt, wird zum Unterschiede was länger gemacht. Je weiter man übrigens e Punkte z, y, auf den Tangenten hinaus hmen kann, und je kürzer man die Theistriche cht, desto besser werden sie auf der Kante des ernier als vollkommen senkrechte kleine gerade nien sich ausnehmen.

XV) Das gewiesene Verfahren, vermit- lst der gezogenen Tangenten r z, s y rc. auf dem ogen r p, senkrecht stehende Theilstriche r 1, 2 u. s. w. zu reissen, hat ausser seiner Be- emlichkeit, noch den Vortheil, daß man irch die Theilpunkte r, s, weit genauer und herer die Theilstriche ziehen kann, als es nach 89. XII. längs eines Linials, das man an n Mittelpunkt des Bogens r p, und an jeden heilpunkt r, s, anlegte, geschehen kann. Ich ollte daher rathen, auch bey den Abtheilun- gen

gen des Randes eines Winkelmessers, sich lieber dieser Methode zu bedienen, als längs eines Linials, die Theilstriche zu reissen, da aber die Breite des Randes vielleicht nicht hinreichen möchte, so große Tangenten auf ihm zu nehmen, daß die damit gezogenen Theilstriche ohne merklichen Fehler für kleine gerade Linien gelten dürfen, so habe ich folgendes Verfahren bequem gefunden.

Man bringe Fig. XLVIII. den durch Punkte bereits getheilten Rand auf einen ebenen Tisch, lege an den Umfang des Randes ein nach der Krümmung desselben geformtes Stück Messing t v w u, genau von gleicher Dicke mit dem Rande, und beschreibe auf t v w u, so nahe als möglich an t u einen Kreisbogen l λ aus dem Mittelpunkte A. Sollen nun z. B. durch die Theilpunkte, q, r, s ꝛc. des Randes Theilstriche gezogen werden, so ziehe man an q eine Tangente, welche den Bogen l λ in x durchschneide. Dann fasse man zwischen beyde Spitzen des Stangenzirkels die Weite q x, und beschreibe damit aus x, den Theilstrich durch q. Nun braucht man weiter keine Tangenten mehr zu ziehen. Denn setzt man bey ungeändertem Abstande beyder Spitzen des Stangenzirkels, die eine Spitze in den nächsten Theilpunkt r, und läßt die andere bey ρ auf l λ hinfallen, so wird, wie sich leicht einsehen läßt, auch r ρ eine Tangente an r seyn, mit der man aus ρ den Theil-

Theilstrich durch r ziehen kann. Sodann auf eine ähnliche Weise wieder den nächsten Theilstrich durch s und so mehrere. Wenn endlich das Stück Messing nicht mehr hinreicht, so darf man es nur weiter an den Rand des Werkzeugs fortschieben, und man wird durch einiges Nachdenken bald finden, daß durch Hülfe desselben nach und nach alle Theilstriche um den ganzen Rand herum gezogen werden können, wenn gleich nur wenig Punkte wie $\varkappa$, ρ, σ auf $I\lambda$ Platz finden. Die bereits erhaltenen Punkte $\varkappa$, ρ, σ lassen sich auch für die folgenden Theilstriche benutzen, an welcher Stelle des Randes sich auch der Ansatz tvuw befinden mag. Uebrigens braucht die Breite tv desselben nicht grösser zu seyn, als etwa 3 Zolle, weil alsdann die Tangenten wie q$\varkappa$, rρ, immer 4 : 5 Zoll lang werden, welches hinlänglich ist, um Theilstriche ziehen zu können, die kein Auge von einer geraden Linie unterscheiden kann, auch wenn sie $1\frac{1}{2}$ Linie lang würden. Daß endlich, während die Theilstriche gezogen werden, der Ansatz tvuw etwa durch ein paar Handschrauben an den Tisch befestigt seyn muß, bedarf kaum einer Erinnerung.

Wer sich übrigens nicht zutraut, Theilstriche auf einem Rande oder auf einem Vernier selbst zu ziehen, oder auch dies keinem geschickten Mechanikus überlassen kann, der bediene sich lieber, wie Römer (§. 92. 7) und Tobias

bias Mayer. (§. 100.) blos eines mit feinen Punkten eingetheilten Randes. Eine gute Micrometerschraube verstattet dabey, nur mit etwas grössern Zeitaufwande, doch alle erforderliche Genauigkeit, und ist bey weiten einem jeden Vernier vorzuziehen, auf dem die Theilstriche nicht mit der größten Sorgfalt gezogen worden sind.

XVI) Das bisherige betraf die Eintheilung des Vernier für die 90 Theilung des Winkelmessers. Man sieht leicht, wie sich auf eine ähnliche Art auch der Vernier für die 96 Theilung wird abtheilen lassen.

Nur muß hiebey noch bemerkt werden, daß der Index oder der Anfangsstrich β des Vernier der 96 Thl. mit dem Anfangsstriche α des Vernier der 90 Theil. genau in einer einzigen geraden Linie liegen müsse, die durch den Mittelpunkt des Winkelmessers geht. (Fig. LVIII.)

XVII) Ehe man daher zur Theilung des V. der 96 Theil. schreitet, muß man vorher sorgfältig die Stelle auf der zugehörigen Vernierkante bestimmen, durch welche der Index gerissen werden muß.

Dieß geschieht, wenn man die Alhidadenregel um ihr Centrum führt, bis (Fig. LVIII.)

der

der Index des V. der 90 Theil. genau an den ersten Theilstrich k des Randes zu liegen kömmt. Da nun der erste Theilstrich i der 96 Theilung auf dem Rande, genau mit dem k der 90 Theil. in eine einzige gerade Linie fällt, so wird dieser Strich, i, auf der anliegenden Kante des Vernier genau den Punkt angeben, durch welchen der Index des Vernier der 96 Theilung gerissen werden muß; Nun erst nimmt man die Alhidadenregel vom Mittelpunkte des Werkzeugs weg, und verfertigt die Theilung auf dem Vernier der 96 Theilung.

Gebrauch der beyden Verniere und der Micrometerschraube.

§. 103. 1. Da die Indices oder Anfangsstriche α, β der beyden Verniere immer in einer geraden Linie liegen, die durch des Werkzeugs Mittelpunct c geht (§. 102. XVI.) und auch nach (§. 99. 5.) die ersten Theilstriche k, i, Fig. LVIII. von denen auf dem Rande die 90 und 96 Theilung angerechnet wird, sich mit c in einer geraden Linie cik befinden, so erhellet, daß, wenn man die Alhidadenregel erstlich in eine solche Lage bringt, daß der Index α des Vernier der 90 Thl. genau an den ersten Theilstrich k zu liegen kömmt, alsdann zu gleicher Zeit auch der Index β des V. der 96 Thl. genau an den Theilstrich i passen wird, dergestalt, daß also beyde Indices, mit i, k, alsdann

in eine gemeinschaftliche gerade Linie cik zusammenfallen, die durch des Werkzeugs Mittelpunkt geht.

2. Wenn nun die Alhidadenregel aus dieser Lage (1) wo beyde Indices genau an k und i liegen, herausgebracht, und von der linken Hand gegen die rechte herumgedrehet wird, dergestalt, daß sie z. E. in die Lage kömmt, wie sie die Fig. LVIII. vorstellt, so wird während der Herumdrehung der Alhidadenregel, jedes Vernier Index auf dem Rande einen gewissen Bogen durchlaufen. Die beyden Bogen $k\alpha$, $i\beta$, die sie solchergestalt beschreiben, werden einander ähnlich seyn, und einem gemeinschaftlichen Winkel $kc\alpha$, oder $ic\beta$, am Mittelpunkte des Werkzeugs zugehören, dem Winkel nemlich, den eine gerade Linie durch beyde Anfangsstriche der Verniere, um den Mittelpunkt des Werkzeugs würde beschrieben haben, indem die Alhidadenregel aus der erstern Lage, in die zweyte gebracht worden ist.

Wenn nun in dieser zweyten Lage die Alhidadenregel an den Rand befestigt worden, so zähle man erstlich auf der 90 Theilung, wie viel Grade und Minuten der Index des zugehörigen Vernier durchlaufen hat, so bekömmt man den Bogen $k\alpha$ als das Maaß des zugehörigen Winkels $kc\alpha$ am Mittelpunkte. Zweytens untersuche man auch den Bogen $i\beta$, den der

In-

Index des V. der 96 Thl. beschrieben hat, reducire die gefundene Menge von 96 Theilen, vermittelst der Tafel, die man zu dieser Absicht berechnet hat §. 102. III. auf gewöhnliche Grade und Minuten, so hat man abermahls das Maaß des erwähnten Winkels am Mittelpunkte, und findet solchergestalt den Winkel durch zwey von einander unabhängige Abtheilungen des Randes, deren eine der andern zur Prüfung dienen kann.

Ex. Gesetzt, der Index des V. der 90 Thl. habe von k angerechnet, 46 ganze Grade durchlaufen, und stehe noch um etwas über den 46ten Gr. hinaus. Man untersuche, welcher Theilstrich des V. mit einem Theilstriche des Randes zusammen passet. Gesetzt, es sey dieses der 28te (§. 73. VIII.), so würde der kleine Bogen oder Winkel, um den der Index über 46° hinaussteht, = 28 . 2′ = 56′ seyn (§. 102. I.). Der ganze Bogen kα, den also der Index α bey Herumdrehung der Alhidadenregel beschrieben hat, wäre = 46° 56′; folglich, so groß auch der zugehörige Winkel kcα am Mittelpunkte des Werkzeugs.

Ferner habe der Index β des Vernier der 96 Theilung, auf dem Rande durchlaufen 50 ganzer Theile und stehe über den 50ten Theil hinaus, so, daß der erste Theilstrich des Vernier (§. 73. VIII.), mit einem Theilstri-

Randes zusammen passete, so würde, wenn $\frac{1}{96}$ des Quadr. b genannt wird, der Inder von i angerechnet, einen Bogen iβ = 50 b + $\frac{1}{32}$ b durchlaufen haben.

Nun drücke man 50 b + $\frac{1}{32}$ b durch Grade und Minuten aus nach (§. 102. II. III.) so wird

$$50\,b = 46^\circ\ 52'\ .\ 30''$$
$$\frac{1}{32}\,b = \quad 1'\ .\ 45'',\ 5$$

Mithin 50 b + $\frac{1}{32}$ b = $46^\circ . 54' . 15'', 5$

Eigentlich müßten hier beyde Bogen kα, iβ, auf dem Rande gleich viel Grade und Minuten für das Maaß des zugehörigen Winkels am Mittelpunkte geben. Da aber, wie die Rechnung ausweiset, auf der 96 Theilung der Bogen iβ = 50 b + $\frac{1}{32}$ b nur $46^\circ . 54' . 15''$ giebt, und hingegen der ähnliche kα auf der 90 Theilung = $46^\circ\ 56'$ gefunden worden, so zeigt dieses, daß der den Bögen iβ, kα zugehörige Winkel am Mittelpunkte nur ohngefähr innerhalb zwey Minuten zuverlässig bekannt sey, und daß also, wenn zwischen $46^\circ . 56'$ und $46^\circ . 54' . 15''$ ein arithmetisches Mittel genommen wird, der Winkel am Mittelpunkte, kcα oder icβ, sehr nahe an $46^\circ . 55' . 7'', 5$ gränzen werde.

Daß beyde Resultate für den Winkel am Mittelpunkte nicht ganz übereinstimmen, kann (1) von kleinen Fehlern in den Abtheilungen des

des Randes herrühren, (2) können leicht bey der Beobachtung des Zusammenpassens der Theilstriche der Verniere, mit denen des Randes, kleine Fehler begangen werden, zumahl wenn man sich dazu keines Vergrößerungsglases bedienet; (3) können vielleicht die ersten Theilstriche des Randes k, i, wie auch die Indices der Verniere α, β, nicht völlig genau in einer geraden Linie liegen.

3. Die unvermeidlichen Fehler in der Beobachtung des erwähnten Zusammenpassens der Theilstriche, dürften sich, bey gehöriger Vorsicht und Anwendung eines Vergrößerungsglases, bey einem Winkelmesser von etwa 6 Zollen im Halbmesser, wohl höchstens auf 10″ belaufen. Wenn demnach beyde Abtheilungen des Randes für einen und denselben Winkel einen größern Unterschied geben, als daß solcher den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann, so erhellet, daß alsdann der Fehler in den Abtheilungen des Randes und der Verniere aufzusuchen ist. Vorschriften dazu werden in der Folge vorkommen; Indessen begnügt man sich, wenn die Verschiedenheit der Resultate beyder Abtheilungen des Randes nicht groß ist, mit dem arithmetischen Mittel zwischen beyden, und so zeigt sich der Vortheil, den zwey von einander unabhängige Abtheilungen des Randes gewähren.

4. Nachdem vermittelst des Verfahrens (2) der Winkel am Mittelpunkte bestimmt worden, so kann man zum Ueberfluß, um sich noch mehr von dessen wahrer Größe zu versichern, die Micrometerschraube zu Hülfe nehmen, und nach §. 101. untersuchen, um wie viel die Indices beyder Verniere rechter Hand der nächsten Theilstriche des Randes hinausstehen. Gesetzt, die Micrometerschraube zeigte, daß der Index des V. der 96 Theilung, um 3′ 20″ über 50 b oder über 46° . 52′ . 30″ hinaus stände, der Index des V. der 90 Theilung aber von dem Theilstriche des Randes, der zu 46° gehört, um 54′ . 40″ entfernt wäre; so wäre im ersten Falle der Winkel am Mittelpunkte = 46° . 52′ . 30″ + 3′ . 20″ = 46° . 55′ . 50″. Im zweyten Falle = 46°. 54′. 40″. Das Mittel aus beyden = 46°. 55′. 15″. Und so zeigte sich noch einmal, daß der Winkel am Mittelpunkte, der oben (2) vermittelst der Verniere = 46°. 55′. 7″, 5 gefunden worden, wenig von der Wahrheit abweichen würde.

5. Ein sehr bequemes Verfahren, durch Hülfe eines längs den Abtheilungen des Randes beweglichen Bogens, die Unterabtheilungen des Randes z. E. in einzelne Grade zu ersparen.

I. Gesetzt, der Rand eines Winkelmessers, z. E. A Fig. LVIII. sey nur von 10 zu 10 Gra:

Graden abgetheilt, und man wolle dennoch einen jeden Winkel messen, ohne daß jeder Raum von 10 Graden des Randes, unmittelbar in die einzeln Grade abgetheilt sey.

II. Dieß zu bewerkstelligen, darf man sich auf der beweglichen Platte In, worauf bisher die Vernierabtheilungen waren, nur einzelne Grade vorstellen, so wird diese Platte, wenn sie vermittelst der Alhidadenredel OQ, herumgeführet wird, jeden Raum von 10 Graden des Randes, in die einzeln Grade abtheilen, und Theile von Graden werden sich durch die Micrometerschraube bestimmen lassen. Begreiflich braucht man auf der Kante der Platte In nur 10 einzelne Grade, weil die Vielfachen von 10 auf dem Rande des Winkelmessers selbst vorkommen.

III. Fig. LVIII*. stellt solchergestalt ein Stück des von 10 zu 10 Graden abgetheilten Randes vor. Anfangs habe der Index der Platte In auf 0 Grad des Randes gestanden, und durch Herumführung der Alhidadenregel sey die in 10 einzelne Grade abgetheilte Platte In in die Lage, wie sie gedachte Figur darstellt, gebracht worden, so steht jetzt der Index I etwas über 5 Grade über den 30ten Grad des Randes hinaus, oder der Winkel, um den die Alhidadenregel gedrehet worden, wäre 35° + x, wo man den Werth von x finden kann, wenn

man

man durch Herumdrehung der Micrometerschraube den Grad 5 der Platte ln völlig genau an den Theilstrich 30 des Randes bringt, und die Revolutionen der Schraube in Minuten und Secunden verwandelt.

IV. Ich erinnere mich nicht sogleich, dieses so bequeme Verfahren, Unterabtheilungen des Randes zu ersparen, irgendwo gelesen zu haben, und dennoch ist es so einfach und leicht darauf zu kommen.

Die Vortheile davon sind beträchtlich. Denn 1) erspart man sich dadurch die so mühsame Abtheilung des ganzen Umfangs eines Randes in kleinere Theile, und vermeidet also dadurch sehr viele Fehler, die, wie mich die Erfahrung belehrt hat, vorzüglich in den kleinen Unterabtheilungen begangen werden. 2) Braucht man weiter keine Unterabtheilungen, als die auf der Platte ln, auf welche man desto mehr Fleiß verwenden kann. 3) Werden sehr viele Theilstriche erspart, indem, wenn der Rand von 10 zu 10 Graden abgetheilt wird (welches bey so kleinen Winkelmessern, als zum Feldmessen gebraucht werden, vollkommen hinlänglich ist), in allem nur 36 Theilstriche zu ziehen sind. Die Erfahrung hat mich belehrt, daß erst durch das Einreissen der Theilstriche die meisten Unrichtigkeiten in die Abtheilungen des Randes kommen. 4) Hat man, um die Eintheilungen

des

es Randes zu prüfen, kaum den 10ten Theil on Arbeit nöthig, die man sonst darauf zu erwenden hat, und man braucht also auch ben veiten keine so weitläuftige Correctionstafel für ie Fehler des Randes, als bey dem gewöhnli-hen Verfahren.

V. Diese Vortheile sind so entscheidend, aß ich nicht zweifle, man werde Gebrauch avon machen, und die bisher so beschwerliche Abtheilung des Randes in einzelne Grade für iberflüssig halten. Freylich wird man sagen, äßt sich nunmehr kein Vernier anbringen, weil ie Platte In zu den Gradabtheilungen des Randes selbst verwandt wird. Allein diesen Verlust halte ich nicht für erheblich, weil die Micrometerschraube, zumahl wenn man nur mmer einerley Gänge derselben braucht, alle iöthige Genauigkeit gewährt, auch man dabey ich auf kein Augenmaaß, wie beym Vernier, u verlassen hat (§. 73. IX.). Ausserdem läßt ich der erwähnte Vortheil auch bey der 96 Theilung des Randes anbringen, da denn die ine Abtheilung wieder der andern zur Prüfung ienen kann (§. 103. *). Das Mittel aus en Resultaten beyder Abtheilungen giebt dann inen Winkel in hinlänglicher Schärfe. Ver-nierabtheilungen haben das Unbequeme, daß die Fehler derselben, sich mit denen des Randes ereinigen, und die entdeckten Fehler nicht so eicht zu corrigiren sind.

VI. Daß sich bey grossen Werkzeugen z. E. Quadranten, wo der Rand unmittelbar in ganze Grade getheilt ist, für die Unterabtheilungen, z. E. von 5 zu 5 Minuten ähnliche Vortheile anbringen lassen, bedarf kaum einer Erinnerung.

VII. Auch erhellet, daß z. E. der Raum von 10 Graden (in II) auf der Platte nl, auch wohl von halben zu halben Graden getheilt werden könnte. Man würde alsdann weniger Umdrehungen der Micrometerschraube nöthig haben, um z. E. den Werth von x in (III) zu finden. Allein bey einem Werkzeuge von etwa 6 Zollen im Halbmesser, wird es kaum nöthig seyn.

VIII. Statt der Platte ln kann auch ein Glaß, worauf die Unterabtheilungen durch zarte Striche bemerkt sind, dienen, und sich mit der Alhidadenregel über die Abtheilungen des Randes schieben, welches, wenn die Theile auf dem Rande selbst, bloß durch Tüpfelchen bezeichnet sind, eine sehr große Genauigkeit gewährt.

6. Hrn. Fischers Verfahren, statt der Micrometerschraube einen excentrischen Kreiß zu brauchen. (M. s. Hrn. Bodens astronom. Jahrbuch für das Jahr 1790. S. 248.)

I. AB (Fig. LXIV.* Tab. VI.) sey das Alhidadenlinial, welches um A beweglich ist,

und in C eine kreisrunde Scheibe, die um einen Punkt D ausserhalb des Mittelpunkts derselben, beweglich ist, und gegen welche das Alhidadenlinial AB durch eine Feder, die hier nicht mit gezeichnet ist, gedrückt wird.

II. Aus D sey auf einer unter der Scheibe liegenden Platte ein Halbkreis GHK beschrieben, und in Grade getheilt.

III. Die Scheibe aber sey bey L mit einem Zeiger LN und Nonius NP versehen, um jeden Winkel messen zu können, um den die Scheibe (I) gedrehet wird.

IV. Durch Umdrehung der Scheibe, wird wegen ihrer excentrischen Bewegung das Linial AB hier gegen die linke Hand fortgeschoben, bis die Scheibe so weit gedrehet worden, daß die Berührung des Linials AB in F geschieht. Hier erreicht das Linial die Gränze seiner Bewegung. Der ganze Winkel aber, den es auf diese Art um A beschreibt, wird nur klein seyn, wenn der Abstand AD ziemlich groß gegen CD ist. Da hingegen die Scheibe C während dieser Bewegung mehr als 180° zurücklegen muß.

V. Hieraus begreift man, daß es leicht ist, die Anordnung so zu machen, daß jeder Winkel, um welchen sich das Linial AB drehe-

100, 200, ja noch mehrere mahle kleiner ausfällt, als jeder zugehörige Winkel der Scheibe — daß folglich, vermittelst dieses Mechanismus, (dessen weitere Anbringung dem Künstler überlassen bleibt) die kleinen Winkel, welche AB beschreibt, mit ausserordentlicher Schärfe gefunden werden können, wenn man sie aus den so viel mahl grössern Winkeln der Scheibe berechnet, wozu Hr. Fischer eine Formel giebt, nach welcher eine Tabelle verfertigt werden kann.

VI. Diese Idee Hrn. F. scheint von erheblicher Anwendung zu seyn, und verdient von Künstlern ausgeführt zu werden, welchen dann zugleich auch die bequemste Einrichtung, Gestalt und Größe der einzeln Theile dieser Vorrichtung überlassen ist.

7. Ein Verfahren, das Maaß eines Winkels auf dem Rande eines Werkzeugs noch mehr vervielfältigt zu erhalten, als in (§. 103. 1. u. 4.)

Man stelle sich vor, an der linken Hälfte der Alhidadenregel OO Fig. LVIII. sey auch eine Vernierplatte (oder eine Vorrichtung wie (Fig. LVIII.*) angebracht, dergestalt, daß die Alhidadenregel mit zwey Vernierplatten (jede mit der Eintheilung sowohl für die 90 als 96 Theilung) versehen sey, deren eine in rechter

Hand,

Hand, über den Abtheilungen des Randes, die andere aber linker Hand über denselben wegstriche, so erhellet, daß wenn die Alhidadenregel um ihr Centrum gedrehet wird, der Inder des Vernier zur linken, eben den Bogen auf dem Rande beschreiben muß, den der Inder des V. zur rechten beschreibt, und daß demnach durch diese zwey Vernierplatten das Maaß eines Winkels genauer, als durch eine allein erhalten werden kann, welches nicht allein zur Vervielfältigung der Angaben für einen und denselben Winkel, sondern auch zu gegenseitigen Prüfungen der Abtheilungen sowohl des Randes, als auch der zugehörigen Verniere, dienen kann. Die Micrometerschraube MK kann übrigens auch für die Vorrichtuug zur linken Hand nach (§. 101.) gebraucht werden.

Die Reichenbachischen Werkzeuge §. 89. XIX. sind sogar mit vier Nonien, die unter rechten Winkeln von einander abstehen, versehen, wodurch das Ablesen der Angaben auf dem Rande noch um so mehr vervielfältigt wird.

Das Fernrohr an dem Winkelmesser.

§. 104. Ist gewöhnlich ein astronomisches mit zwey erhaben geschliffenen Gläsern. (Kästn. Dioptr. 89.) Wenn die Brennweite des Objectivs 1 Rheinl. Fuß lang ist, so muß die Brennweite des Oculars = 0, 61 Zoll

wenn das Fernrohr guten Effect leisten soll. Die Vergrößerung ist dann etwa 20 mahl. S. Hugenii Dioptr. propositio LVI, auch Smiths Lehrbegr. der Optik nach Kästnern S. 193.; woselbst auch eine Tabelle für die Brennweiten der Objective und Oculare größerer Fernröhre befindlich ist. Gewöhnlich arbeiten aber die Optiker nicht nach dieser Tabelle, sondern nehmen kürzere Oculare.

Beyde Gläser des Fernrohrs werden in messingene Röhren, XX und Y fig. LXVI. gefaßt, deren eine man nach Gefallen in die andere hineinschieben kann. An das Ende der Röhre des Objectivs XX wird ein Ring fig. LXVII. angeschroben, der ein eben geschliffenes Glas umfasset, auf welchem zwey zarte auf einander senkrecht stehende Linien eingerissen sind, die sich im Mittelpunkte des Glases, und und also in der Axe des Fernrohrs durchkreuzen. Die Röhre des Oculars Y wird alsdann an die Röhre des Objectivs XX so weit vorgeschoben, bis man durchs Ocular die eingerissenen Linien cd, ef, auf dem Planglase, sehr deutlich siehet. Wenn nun das Fernrohr auf die Alhidadenregel befestigt worden, §. 99. 18. so muß der Strich cd in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene liegen. Denn cd ist hier eben das, was der Faden Bb in dem Objectivdiopter Fig. XLVIII. vorstellte. Er bestimmt nämlich die dioptrische Ebene, in der

die

die Gegenstände, die man durchs Fernrohr betrachtet, erscheinen müssen.

Wie man diesen Strich in die gehörige Lage bringt, soll unten gezeigt werden.

Uebrigens können cd, ef, auch ein paar feine Silberfäden seyn, welche sich kreuzweis in dem Mittelpunkt des Ringes durchschneiden, und durch eine leicht zu erdenkende Vorrichtung, etwa durch Schräubchen, sich gehörig anspannen lassen. Ich ziehe dergleichen Silberfäden den aufs Glas gerissenen Linien vor, weil sie schärfer begränzt erscheinen, und, wenn man an der Schärfe derselben hinausvisirer, eine sehr große Genauigkeit verstatten. Reichenbach bedient sich statt der Silberfäden feiner Spinnenfäden.

Mayers Recipiangle.

§. 105. Mein Vater, Tob. Mayer, hat in den *Commentar. Soc. R. Goett.* T. II. p. 336., einen Winkelmesser angegeben, der wegen seiner Bequemlichkeit, beym Feldmessen gute Dienste leistet.

Dieses Werkzeug bestehet T. IV. Fig. L. bloß aus zwey gleich langen messingenen Regeln AB, CD, von denen AB um einen durch die Mitte gehenden stählernen konischen Zapfen

von 40° und 40° 12′, von 40° und 40° 24′ u. s. w. darstellen. Z. E. lf würde der Unterschied der Chorden von 40° und 40° 24′, folglich die Weite bf die Chorde von 40° 24′ seyn. Und so hätte man bey einer solchen Einrichtung, ohne merklichen Fehler, alle Chorden von 12 zu 12 Minuten.

14. Hätte man der Höhe BA z. E. 20 gleiche Theile gegeben, so erhielte man alsdann auf dem Transporteur, alle Chorden von 3 zu 3 Minuten. So findet sich in Leupolds Theatr. Geom. auf der XXV. Kupfertafel ein geradlinigter Transporteur für die Chorden von 5 zu 5 Minuten.

15. Gewöhnlich werden solchergestalt die geradlinigten Transporteure auf Messing oder Elfenbein verzeichnet.

Gebrauch des geradlinigten Transporteurs.

16. Gesetzt, Fig. LII. wolle man die Größe des Winkels QgP bestimmen.

Weil nun auf dem geradlinigten Transporteur die Chorde von 60° der Halbmesser des Kreises ist, zu dem diese Chorden gehören, so fasse man die Weite B 60° Fig. LIII. mit dem Handzirkel, setze die eine Zirkelspitze in den Scheitel des Winkels QgP Fig. LII. ein, und be-

Es erhellet, daß hier die obere Regel AB, die Alhidadenregel ist.

Wenn nun z. E. beyde Liniale einen gewissen Winkel igl mit einander machen, so wird solcher vermittelst seiner Chorde il bestimmt. Hierzu ist aber ein geradlinigter Transporteur nöthig, dessen Einrichtung auf folgenden Gründen beruhet.

Der geradlinigte Transporteur.

§. 106. 1. Es sey (Fig. LII.) lni ein gewisser Kreisbogen, mit einem willkührlichen Halbmesser gi = gl beschrieben, und li dessen Chorde. Man fälle aus dem Mittelpunkte g auf die Chorde li ein Perpendickel gw herab, so wird dadurch sowohl der Winkel igl als auch dessen Chorde il halbiret.

2. Also $igw = \frac{1}{2} igl$; $iw = \frac{1}{2} il$.

3. Man nenne den Halbmesser $gi = R$, und den Winkel $igl = \alpha$, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke igw.

$$gi : iw = \sin tot : \sin igw \text{ oder}$$
$$R : iw = 10000000 : \sin \tfrac{1}{2} \alpha.$$

$$\text{Mithin } iw = \frac{R \sin \frac{1}{2} \alpha}{10000000}.$$

4. Und die ganze Chorde il $= \frac{2 \, . \, R \sin \frac{1}{2}\alpha}{10000000}$.

5. So ist also für jeden angenommenen Winkel igl, und den gegebenen Halbmesser gi, die Chorde dieses Winkels gefunden.

6. Man setze, der Halbmesser R oder gi sey in 1000 gleiche Theile getheilet, also R = 1000, so würde

$$il = \frac{2 \, . \, 1000 \, . \sin \frac{1}{2}\alpha}{10000000} = 2 \, . \, \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{10000}.$$

7. Das heißt, man nehme den Sinus der Hälfte desjenigen Winkels α, dessen Chorde man suchen will, aus den Sinustafeln, dividire ihn mit 10000 oder schneide 4 Decimalstellen von der rechten Hand gegen die linke ab, und multiplicire mit 2, so hat man die Chorde des vorgegebenen Winkels für den Halbmesser = 1000.

8. Ex. Man sucht die Chorde von 20°. Hier ist also $\alpha = 20°$; $\frac{1}{2}\alpha = 10°$. Nun ist

$\sin \frac{1}{2}\alpha = 1736482$.

Mithin $\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{10000} = 173,6482$, also mit 2 multipliciret $\frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{10000} = 347,2964$ = der Chorde von 20°.

9. Das will sagen, die Chorde von 20° hält 347 ganzer solcher Theile, dergleichen der Halbmesser 1000 hält, und noch etwas darüber, welches aber keinen ganzen solchen Theil beträgt. Man nimmt daher blos die 347 Theile des Halbmessers, so hat man die Chorde von 20° ohne beträchtlichen Fehler.

10. So kann man also für den Halbmesser 1000 eines jeden angenommenen Winkels Chorde berechnen.

Von 5 zu 5 Graden wären die Chorden diese:

Grade	Chorden	Grade	Chorden	Grade	Chorden
5°	87	35°	601	65°	1074
10	174	40	684	70	1147
15	261	45	765	75	1217
20	347	50	845	80	1285
25	432	55	932	85	1351
30	516	60	1000	90	1414

So könnte man leicht für jede einzeln Grade die Chorden finden.

11. Weil die Chorde von 60° dem Halbmesser gleich ist, so ist hier Chord. 60° = 1000.

12. Diese berechneten Chorden (10) pflegt man nun auf Linien zu tragen, und die mittlern nach Art des verjüngten Maaßstabes (§. 65.) zu bestimmen.

Man ziehe Fig. LIII. eine gerade Linie AC, und durch A auf AC eine perpendiculäre AB, auf die man eine gewisse Anzahl gleicher Theile z. E. hier in der Figur, 5 gleiche Theile absetze; durch B ziehe man mit AC eine parallele, und trage nun von einem tausendtheiligten Maaßstabe, von A nach 5° die Chorde von 5°, also 87 Theile des Maaßstabes (10). Von B nach 10° setze man die Chorde von 10°, also 174 Theile des Maaßstabes, von A nach 15° die Chorde von 15°, also 261 Theile u. s. w. bis endlich von B nach 90° die Chorde von 90°, also 1414 Theile des Maaßstabes abgesetzt sind. Durch die Theilpunkte auf AB, ziehe man mit AC lauter Parallelen, und hierauf die schiefen Linien von B nach 5°, von 5° nach 10° u. s. w. So heißt der Maaßstab BC eine Chordenscale, oder ein geradliniger Transporteur, weil man auf ihm die Chorden aller Winkel von 0 bis 90° absassen kann.

Denn weil in dem Dreyecke BA5°, die Seite AB in 5 gleiche Theile getheilt ist, so sind in diesem Dreyecke, die mit A5° parallelen Querstückchen a1, b2, c3, d4, A5°, nach der Ordnung die Chorden von 1°, 2°, 3°, 4°, 5°. In dem Trapezio A5° B10° sind die Querstückchen A5°, d6, c7 u. s. w., von A5° nach B10° heraufgerechnet, nach der Ordnung die Chorden von 5°, 6°, 7° u. s. w.

In

In dem Trapezio B 10° A 15° hat man von B 10° nach A 15° herunter gerechnet, die Chorden von 10°, 11°, 12°, 13°, 14°, 15°.

Also würde ferner z. E. das Querstück von dem Theilpunkte b bis nach f, die Chorde von 42° seyn; und so hätte man alle Chorden der einzeln Grade von 0 bis 90°.

Dieses Verfahren, die mittlern Chorden durch Zeichnung zu bestimmen, hat offenbar mit der Verfertigung des verjüngten Maaßstabes Aehnlichkeit, setzt aber voraus, daß die Chorden von 5 zu 5 Graden gleichförmig wachsen. Diese Voraussetzung gilt aber nur für kleine Winkel ohne merklichen Fehler, und wird desto unrichtiger, je größer die Winkel sind. So erhellet z. E. aus obiger Chordentafel, daß die Chorde von 10° zwey mahl so groß ist, als die Chorde von 5°, die von 15° dreymahl so groß, daß also von 5° bis 15° die Chorden ziemlich gleichförmig wachsen, oder daß wenigstens die Ungleichförmigkeit nicht sichtbar ist, wenn man den Halbmesser nur in 1000 Theile theilt.

Man nehme aber z. E. die Unterschiede der Chorden von 65° und 70°, von 65° und 75°; Ersterer ist = 1147 — 1074 = 73, Letzterer 1217 — 1074 = 143.

Aus diesen Unterschieden erhellet offenbar, daß die Chorden von 65° bis 70°, und von 70° bis 75° ungleichförmig wachsen, weil sonst der Unterschied der Chorden von 65° und 70°, nur die Hälfte seyn müßte von dem Unterschiede der Chorden von 65° und 75°; Es ist aber keinesweges $73 = \frac{1}{2} \cdot 143$.

Da demnach bey großen Winkeln das Wachsthum der Chorden von 5 zu 5 Graden nicht mehr gleichförmig geschiehet, so werden auch die mittlern Chorden, wenn man sie nach der gewöhnlichen Art des verjüngten Maaßstabes bestimmt, so daß man auf AB lauter gleiche Theile absetzt, nicht mit völliger Genauigkeit gefunden.

Man ziehe durch α, wo sich die Sehne von 45° endigt, die Linie $\alpha\beta$ mit BA parallel, so ist $\beta 45° = A 45° - B 40°$ = dem Unterschiede der Sehnen von 40°, 45°; die mit $\beta 45°$ parallelen Querstückchen in dem Dreyecke $\alpha\beta 45°$ können aber nicht genau den Unterschieden der Chorden von 40° und 41°; von 40°, 42° u. s. w. gleich seyn, weil die erwähnten Querstückchen oder Unterschiede wegen der gleichen Theile auf BA oder $\alpha\beta$, gleichförmig wachsen, die Unterschiede der Chorden von 40° bis 45°, als so großer Bogen, aber sich nicht mehr ohne merklichen Fehler, wie die Unterschiede der Bogen verhalten. So würde also

das

as zweyte Querstückchen lf, nicht genau dem
Unterschiede der Sehnen von 40° und 42°,
olglich auch die Linie von b nach f nicht genau
ie Sehne von 42° Grad seyn.

Man hat also auf dem geradlinigten Trans-
porteur hier nur diejenigen Chorden genau,
elche man unmittelbar aufgetragen hat;
elche aber durch Zeichnung gefunden werden,
. E. die von 42°, sind insgesammt desto un-
ichtiger, zu je größern Winkeln oder Bogen
e gehören.

13. Man wird also lieber die Chorden
urch alle einzelnen Grade berechnen und
nmittelbar auftragen, als sie aus denen von
zu 5 Graden durch Zeichnung bestimmen.
Begreiflich lassen sich alsdann auch diejenigen
Sehnen, welche zwischen die einzelnen Grade
allen, mit größerer Zuverlässigkeit durch Zeich-
ung finden, weil die Chorden von einzeln zu
inzeln Graden gleichförmiger wachsen, als
on 5 zu 5 Graden.

Z. E. hätte man von A nach δ die Chorde
on 41°, von B nach α aber die Chorde von
.0° getragen, und hätte der Höhe BA, 5
leiche Theile gegeben, so würden in dem
Dreyecke αβδ, die parallelen Querstückchen,
on α nach βδ herunter gerechnet, ohne merk-
ichen Irrthum die Unterschiede der Chorden

von 40° und 40° 12′, von 40° und 40° 24′ u. s. w. darstellen. Z. E. If würde der Unterschied der Chorden von 40° und 40° 24′, folglich die Weite bf die Chorde von 40° 24′ seyn. Und so hätte man bey einer solchen Einrichtung, ohne merklichen Fehler, alle Chorden von 12 zu 12 Minuten.

14. Hätte man der Höhe BA z. E. 20 gleiche Theile gegeben, so erhielte man alsdann auf dem Transporteur, alle Chorden von 3 zu 3 Minuten. So findet sich in Leupolds Theatr. Geom. auf der XXV. Kupfertafel ein geradlinigter Transporteur für die Chorden von 5 zu 5 Minuten.

15. Gewöhnlich werden solchergestalt die geradlinigten Transporteure auf Messing oder Elfenbein verzeichnet.

Gebrauch des geradlinigten Transporteurs.

16. Gesetzt, Fig. LII. wolle man die Größe des Winkels QgP bestimmen.

Weil nun auf dem geradlinigten Transporteur die Chorde von 60° der Halbmesser des Kreises ist, zu dem diese Chorden gehören, so fasse man die Weite B60° Fig. LIII. mit dem Handzirkel, setze die eine Zirkelspitze in den Scheitel des Winkels QgP Fig. LII. ein, und be-

beschreibe mit der andern den Kreisbogen inl, fasse hierauf die Chorde il, und trage sie auf den Transporteur (Fig. LIII.) indem man die eine Zirkelspitze in einen Theilpunkt auf BA einsetzt, und nachsieht, auf welchen Theilpunkt einer schiefen Linie (wie z. E. md) die andere hinfällt, so weiß man den Winkel igl, dem die Weite il als Chorde zugehört. Gesetzt, die Chorde il auf den geradl. Transporteur getragen, reiche von b nach f, so würde der Winkel igl = 42° seyn.

Der geradlinigte Transporteur für das Werkzeug §. 105. und Fig. L.

§. 107. Ist so eingerichtet, daß der Halbmesser des Werkzeugs Fig. L., d. h. die Weite gl = gk = gi = gm, genau in 1000 gleiche Theile getheilt, auf dem geradlinigten Transporteur die Chorde von 60° abgiebt. Für diesen Halbmesser gl sind auf einer metallenen Platte die Chorden von einzeln zu einzeln Graden aufgetragen, und nach dem bisher gewiesenen Verfahren, die mittleren von 10 zu 10 Minuten, durch Zeichnung gefunden. Man kann aber auch sehr leicht noch die Chorden von 3 zu 3 Min. nach dem Augenmaaße bestimmen, wenn man nemlich der Höhe BA des Transporteurs, die eigentlich in 6 Theile getheilt ist, in Gedanken mehrere Theile giebt.

Wenn nun die beyden Liniale AB, CD, Fig. L. einen gewissen Winkel igl mit einander machen, so wird mittelst der zwischen den feinen Punkten l, i, enthaltenen Chorde li, nachdem solche auf den geradlinigten Transporteur getragen worden, die Grösse des Winkels lgi ohngefähr von 3 zu 3 Min. bestimmt werden können, wenn man das Augenmaaß zu Hülfe nimmt.

Mein Vater bediente sich aber einer besondern Art, Winkel mit diesem Werkzeuge zu messen, wodurch sich der Winkel wie igl noch weit genauer, als unmittelbar auf der Chordenscale erhalten läßt. Ich werde dieß Verfahren unten (§. 135) beybringen, und verweise meine Leser unterdessen auf den II. Tom. d. Goett. Comm. ad ann. 1752. p. 336., worin dasselbe weitläuftig aus einander gesetzt ist.

Da man die beyden Regeln AB, CD zusammenlegen kann, so ist dieses Werkzeug sehr bequem, es in der Tasche bey sich zu tragen, zu gleicher Zeit ist man auch der Abtheilung eines Randes in 360 Grade überhoben, in Vergleichung deren, die Verfertigung des geradlinigten Transporteurs weit weniger Mühe kostet. Die Methode, Winkel durch Hülfe ihrer Sehnen zu messen, ist auch bey Branders Spiegelsextanten (Augsburg 1774) und anderen Werkzeugen angewandt. M. s.

dessen

ssen Beschreibung eines geometri-
chen Instruments, in Gestalt eines
Proportionalzirkels, 1780.

Der Meßtisch.

§. 108. 1. Dieses Werkzeug ist eines der wichtigsten in der practischen Geometrie, weil man vermittelst desselben eine Figur auf dem Felde sogleich mit allen ihren einzeln Bestimmungen, zu Papiere bringen kann, und die Kosten sehr erträglich sind, womit sich dasselbe anschaffen läßt.

Die meisten Meßtische, deren man sich aber bisher bedient hat, sind vielen Unvollkommenheiten unterworfen, z. E. daß sie nicht fest genug stehen, keine Vorrichtungen haben, wodurch man ihnen ausser den groben Bewegungen auch die nöthigen sanften verschaffen kann u. d. gl. mehr.

Nach meiner Idee habe ich mir einen Meßtisch nach folgender Einrichtung verfertigen lassen.

Fig. LIV. Tab. IV. stellt das Werkzeug im perspectivischen Aufrisse dar. A ist ein gewöhnliches Reisbrett zum Aufspannen des Papiers. Es wird von guten ausgetrockneten Lindenholze verfertigt. Damit es sich in der Sonnenhitze nicht werfe, oder Risse bekomme, wird

es nicht aus einem einzigen Brette, sondern aus mehreren Stücken zusammengesetzt, welche so verbunden und zusammengeleimt werden, daß sich die Jahre oder Holzfasern, beständig durchkreuzen. Das Papier wird an den 4 schmalen Seitenflächen oder Kanten des Tisches mit Tischlerleim befestigt, und wie bekannt, naß aufgezogen, damit es sich beym Trocknen recht straff anspanne.

2. Das Stativ des Meßtisches bestehet aus folgenden Theilen: Erstlich, aus dem hölzernen Cylinder H Fig. LIV. und Fig. LV. der sich in ein dreyeckigtes Prisma endiget, an dessen Seitenflächen die Füße des Stativs F, F, F, um messingene Axen g. g, g, beweglich sind, und vermitteist der Schrauben r, r, r in einer unverrückten und festen Lage erhalten werden können. Zweytens, aus der hölzernen Vorrichtung M Fig. LIV. und Fig. LV. die mit drey Armen c, c, c und mit einer starken hölzernen Schraube w versehen ist, die auf den Cylinder H aufgeschroben wird. Durch diese Arme gehen drey hölzerne Schrauben y, y, y, die man bis unter das Tischblatt A schrauben kann. Sie dienen sowohl dem Tische zu einer Stütze, als auch denselben in eine genaue horizontale Stellung zu bringen.

Die messingenen Axen g, g, g müssen aus einem einzigen Stücke bestehen, welches

ermittelst Ruthen in den prismatischen Theil on H eingelassen, und durch eingeleimte Stäbhen, womit die Ruthen wieder verschlossen verden, in dem Prisma festgehalten wird.

3. Um nun dem Tischblatte AA, die nöhigen Horizontalbewegungen zu verschaffen, so ient eine Vorrichtung, davon Fig. LVI. das Profil darstellt, auf folgende Art.

αα ist der Durchschnitt einer runden messingenen Platte a, welche man in Fig. LVII. iehet, wo der Meßtisch in umgekehrter Lage orgestellt ist: diese Platte a umgiebt der messingene Ring ddd, davon δ, δ Fig. LVI. der Durchschnitt ist: dieser Ring wird durch 3 hinänglich starke Schräubchen i, i, an die untere Fläche des Tisches AA befestigt. Der innere Umfang dieses Ringes muß genau abgedreht, nd mit dem Umfang der Platte a zusammengechmirgelt werden, damit sich der Ring ddd nit dem daran befindlichen Tischblatte AA, sanft m die Platte a herumwenden lasse.

Es ist gut, wenn man wenigstens mit wey Tischblättern wie AA versehen ist, damit venn der eine Tisch vollgearbeitet ist, man ihn urch Lösung der Schräubchen i, i, herabnehmen, und einen andern aufschrauben kann, in velchem Falle denn derselbe mit Schraubenmütterchen für die Schräubchen i, i, genau in den-

sel-

selben Abständen von einander, als der erstere, versehen seyn muß.

4. Die Platte aa bestehet mit dem cylindrischen Zapfen n aus einem Stücke; dieser Zapfen n ist innerhalb der Höhlung einer messingenen cylindrischen Hülse beweglich, an welcher eine Nuß m befindlich ist, die sich in einer ihr zugehörigen, sie scharf umfassenden kugelförmigen Hülse, herumwenden läßt. Diese Hülse befindet sich an einer runden Platte hh, die durch Schräubchen auf die Vorrichtung M (Fig. LIV. LV.) befestigt wird.

Die Schraube x, welche durch die äussere Cylinderhülse geht, dient, den Zapfen in einer unverrückten Lage zu erhalten. Da wo die Schraube x durch die Hülse geht, vermehrt man die Dicke des Metalls, durch ein angelöthetes Plättchen, damit die Mutter für die Schraube x mehrere Gänge erhält, und sich nicht zu bald abnutze, oder man läßt auch um die gedachte Hülse einen dickern Wulst stehen, durch welchen man die Schraube x gehen läßt, wie z. B. an der Hülse R. (Fig. LI.) zu ersehen ist, welche Vorschriften überhaupt bey allen ähnlichen Einrichtungen zu beobachten sind.

5. An der runden Platte a Fig. LVII. ist ein kleiner Arm V angelöthet; dieser trägt einen Ansatz e, und eben so hat auch das Tischblatt

A einen dergleichen bey o. Durch diese bey-
en Ansätze o, o, gehet eine Stellschraube z.
Sie dienet, der ganzen Fläche des Meßtisches
ine sanfte horizontale Wendung zu geben, wie
ogleich erhellen wird.

6. Wenn nun solchergestalt der Tisch auf
er bisher beschriebenen Vorrichtung (Fig. LVI.)
uhet, und man will Fig. LIV. demselben eine
horizontale Lage geben, so verrücke man erst-
ich die Beine des Stativs so lange, bis ohn-
gefähr nach dem Augenmaaße das Tischblatt AA
ine horizontale Lage hat. Um aber die völlig
genaue horizontale Stellung zu erhalten, so
drehe man die Schrauben y, y, y, etwas her-
unterwärts, damit sie nicht hinderlich sind,
wenn man die Nuß an dem Meßtische in ihrer
Hülse herumwenden will.

Man wende alsdann die Nuß in ihrer
Hülse so lange, bis eine auf das Tischblatt
AA gestellte Wasserwaage (siehe unten §. 114.)
den wahren horizontalen Stand desselben an-
giebt. Hierauf schraube man die Schrauben
y, y, y wieder sanft bis unter das Tischblatt,
so wird sich dasselbe unverrückt in seiner hori-
zontalen Lage erhalten lassen. Ja, wenn man
nachher auf dem Tische handthieret, und sich
derselbe wieder etwas aus seiner Stellung ver-
rücken sollte, so kann man selbst durch diese
Schrau-

Schrauben, die gegen die untere Fläche des Tisches drücken, den horizontalen Stand so-gleich wieder herstellen.

7. Hat auf diese Art der Meßtisch eine horizontale Stellung, so wird er sich horizontal herumwenden lassen, wenn man die Schraube x Fig. LVI. löset. Alsdann nämlich wird der an der Platte *aa* befindliche Cylinder n in der Höhlung der ihn umgebenden Hülse beweglich seyn, und dem Tische A eine horizontale Wendung, als um eine Axe, verstatten.

Ausser dieser groben Horizontalwendung erhält man aber eine sanfte, wenn man die Schraube x wieder anziehet, und hierauf die Stellschraube ze Fig. LVII. herumwendet: Alsdann nämlich treibt diese den Meßtisch AA, mit dem daran befindlichen Ringe ddd, sanft um die Platte a oder *aa* (Fig. LVI.) und verstattet, daß man den Meßtisch ganz unmerklich horizontal herumwenden kann.

8. Dieses ist im Ganzen die Zusammensetzung eines zu Horizontalvermessungen brauchbaren Meßtisches; und ich bin überzeugt, daß er alle nöthigen Bedingungen erfüllt, wenn die einzeln Theile desselben, von dem Mechanicus fleißig und gut gearbeitet sind. Die drey Schrauben y, y, y, nebst der Nuß, worauf das Tischblatt ruhet, geben ihm einen sehr festen

Stand

stand; den es nicht haben würde, wenn man e Schrauben y, y, y, weglassen, und bloß, ie gewöhnlich, das Tischblatt auf einer Nuß ihen lassen wollte, die man oft, um Kosten ı ersparen, nicht einmal von der nöthigen röße und Stärke verfertigen läßt.

9. Die Abmessungen der bisher beschrie-nen einzeln Theile mögten etwa folgende seyn:

Das Tischblatt AA lang und breit		$1\frac{1}{2}$ Fuß
	=	18 Zoll
dick	=	1 Zoll
ver Arme e, e, e Länge	=	5 Zoll
Dicke	=	$1\frac{1}{4}$ Zoll
)es Cylinders H Durchmesser	= etwa	$3\frac{1}{2}$ Zoll
)er Platte a Durchmesser	=	$2\frac{3}{4}$ Zoll
)es Ringes ddd Durchmesser	=	$3\frac{1}{4}$ Zoll
)es innern Cylinders n Länge	=	$2\frac{1}{2}$ Zoll
)ie ganze Höhe von αα bis ans Ende der Nuß	=	$3\frac{1}{2}$ bis 4 Zoll
)es an der Platte a befindlichen Aermleins V Länge	=	3 Zoll
)er Stellschraube z e Länge	=	$2\frac{3}{4}$ Zoll
Dicke	=	$2\frac{1}{4}$ Lin.
;hr ohngefährer Abstand von der untern Fläche des Tischblattes	=	$1\frac{1}{4}$ Zoll

Die Schrauben y, y, y, wenn sie von Holz ıd, müssen etwa ¾ Zoll im Durchmesser ha-n. Sonst kann man sie auch von Messing

machen, in welchem Falle es aber gut ist etwas grobe Schraubengänge anzuwenden, damit sie sich beym Umdrehen nicht zu langsam von dem Tischblatte entfernen, und also keinen Zeitverlust verursachen. Die Schraube x darf nicht zu schwach seyn, damit der Cylinder n hinlänglich fest in seiner Hülse erhalten werden könne. Die Abmessungen der übrigen kleinern Theile sind meistens willkührlich, und es hängt von dem Mechanico ab, ihnen eine schickliche Grösse und Stärke zu geben. Die Hauptsache ist, daß nichts an dem Werkzeuge schlottre und wanke.

Wenn man es bequemer findet, kann man auch an die Platte αα einen hohlen Cylinder setzen, und solchen um einen an der Nuß m befindlichen Zapfen drehen lassen. Statt der hölzernen Schraube w (Fig. LV.) kann man noch besser einen viereckigten Zapfen nehmen, der in ein zugehöriges Loch im Cylinder H passet, und sich seitwärts, vermittelst einer durch H gehenden Schraube feststellen läßt. Ueberhaupt sieht man, daß einzelne Theile Abänderungen leiden können, die im Ganzen nicht wesentlich sind.

Man kann diesen und andere Meßtische, so wie überhaupt auch andere Feldmesser-Werkzeuge, Astrolabien, Boussolen, Nivellirinstrumente u. d. gl. von dem hiesigen geschickten Mechanicus Apel um die billigsten Preise verfer= ... erhalten. Auch sind bey demselben physicalische

che Werkzeuge von unterschiedener Art zu ha-
n.

Noch einige andere Einrichtungen brauchbarer Meßtische.

Marinoni's Meßtisch.

§. 109. Man findet die Beschreibung davon
n Marinoni's Werke de re ichnographica,
Viennae 1752. pag. 13. M. verspricht sich
hr viele Vortheile von diesem Meßtische.

Das ihm Eigene bestehet darinnen, daß
ch das Tischblatt in Nuthen hin und her
hieben läßt, wodurch jeder Punkt auf dem
Meßtische vertical über einen vorgegebenen Punkt
uf dem Boden gebracht werden kann.

Im Grunde scheint mir aber die dazu gehö-
ge Vorrichtung etwas zusammengesetzt, und
berhaupt der Meßtisch zu schwer und unbe-
uem.

Durch gehörige Verrückung der Beine des
Statives läßt sich die Absicht des Hrn. Ma-
inoni immer mit hinlänglicher Genauigkeit,
nd vielleicht mit eben so geringen Zeitaufwande
reichen.

Branders Meßtisch.

Die Beschreibung davon findet sich in einer
einen zu Augspurg 1772. herausgekom-

Schrift des Hrn. Br. (Der neue geometrische Universalmeßtisch). Er nennt sein Werkzeug einen Universalmeßtisch, weil er zugleich einen eingetheilten Winkelmesser dabey anbringt; auch dient sein Werkzeug zu Höhenmessungen, indem zu dieser Absicht an der schmalen Seitenfläche des Tischblatts noch ein eingetheilter verticaler Halbkreis befestigt ist. Es hat übrigens dieser Meßtisch auch alle Vorrichtungen, sowohl zu den groben als sanften Bewegungen. Statt der gewöhnlichen Diopterliniale bedient sich Br. der Fernröhre, die mit sehr guten Glasmicrometern versehen sind. Es ist nur Schade, daß dieser Meßtisch durch seine Einrichtung etwas zu kostbar ausfällt.

Br. hat nachher 1774. noch einen Beytrag zu oberwähnter Schrift herausgegeben, und darinn die Beschreibung eines Spiegelsextanten, wie auch einer neuen Abänderung seines Meßtisches bekannt gemacht.

Hogrevens Meßtisch.

Hr. Hogreve, Ingen. Obrist Lieut. in Hannöverischen Diensten, hat 1773. eine Anleitung zur topographischen Vermessung eines ganzen Landes bekannt gemacht, und in diesem Buche ebenfalls eine neue Einrichtung des Meßtisches beschrieben.

Da der Verf. gute theoretische Kenntnisse esitzt, und mit seinem Meßtische selbst viele Vermessungen angestellet hat, so ist nicht zu weifeln, daß sein Werkzeug zur topographischen lufnahme eines Landes, alle nöthige Vollkomenheit habe.

Der verbesserte Meßtisch für Freunde der practischen Geometrie, Frankf. und Leipz. 1789.

Der ungenannte Verfasser beschreibt in dieer Schrift einen Meßtisch, der in Ansehung er Verschiebung des Tischblattes, Aehnlichkeit nit dem Marinonischen Meßtische hat. Er ist ibrigens mit einer Schraube ohne Ende verehen, welche in die Vertiefungen einer runden Platte eingreift, wodurch dem Werkzeuge eine anfte Horizontalbewegung ertheilt werden kann. Andere Einrichtungen scheinen mir aber etwas u erkünstelt. Indessen mag dieser Meßtisch mmer seine Stelle unter den guten vertreten.

Es ist in dieser Schrift auch ein brauchbares Werkzeug zur genauen Eintheilung der Maaßstäbe beschrieben, auch enthält sie verchiedene Verbesserungen des Diopterlinials, um dasselbe vorzüglich auch bey sehr erhabenen oder iefliegenden Gegenständen brauchen zu können.

Fig. LXVIII. Tab. VI. stellet eine solche dioptrische Regel für den Meßtisch kürzlich dar. P ist ein Linial von Messing oder Birnbaumholz, an dessen beyden Enden die Ocular- und Objectivdioptern e, d, befestigt sind. Der Schlitz in der Oculardiopter e, nebst dem ausgespannten Silberfaden in der Objectivdiopter d, müssen genau auf der Ebene des Linials de senkrecht stehen. Das Linial de muß so lang seyn, als der Meßtisch, damit man längs der Schärfe ik des Linials über die ganze Fläche des Meßtisches gerade Linien ziehen könne.

Bey diesem Diopterliniale liegt die Schärfe ik mit dem Schlitze der Oculardiopter und dem Faden der Objectivdiopter in einer und derselben Ebene. Sind daher die Dioptern nach einem gewissen Gegenstande hingerichtet, so liegt eine längs ik gezogene gerade Linie auch mit diesem Gegenstande in einer und derselben Ebene.

2. Einige lassen ihre Diopterliniale so verfertigen, wie Fig. LXIX. ausweiset, nehmlich daß die durch den Schlitz mp, und den Faden ln, eingebildete dioptrische Ebene durch die Mitte des Linials gehet, und mit der Schärfe ik desselben parallel ist.

3. Wenn bey dieser letztern Einrichtung die Dioptern nach einem gewissen Objecte hingerichtet sind, so daß das Object in der dioptri-

schen

hen Ebene lnmp erscheint, und man zie- et alsdann längs ki auf dem Meßtische eine erade Linie, so wird diese zwar mit der nach em Objecte zulaufenden Linie pn, oder mit er Visirlinie parallel seyn, aber ki wird icht nach dem Objecte hinzielen, sondern an emselben etwas vorbeystreichen, welches kleine ehler verursachen kann, die sich ohngefähr aus ig. LXX. werden beurtheilen lassen.

3. Gesetzt t Fig. LXX. sey auf dem Meß- sche ein gegebener Punkt. P und Q ein aar Objecte, und man wolle an dem Punkte den Winkel PtQ beyder Objecte bestimmen; würde man, nach dem gewöhnlichen Verfah- n, an den Punkt t das Diopterlinial kn legen, es so lange herumwenden, bis das Ob- ct P in der Visirlinie pn erschiene, und nn längs der Schärfe ki, auf dem Meß- sche durch den Punkt t die gerade Linie i ziehen.

Hierauf würde man das Linial um t herum- ehen, und die Diopteru nach dem Gegenstan- Q hinrichten; Wenn nun Q in der Visir- nie $\pi\nu$ erschiene, so würde man durch t längs s anliegenden Linials die gerade Linie tη zie- n; den Winkel itη, den man solchergestalt f dem Meßtische erhielte, würde man für n Winkel annehmen, den beyde Objecte P, Q, dem Punkte t mit einander machten.

Allein man siehet leicht, daß der Winkel $it\eta$ mit dem wahren Winkel PtQ nicht einerley seyn kann.

4. Um dieses deutlich zu übersehen, überlege man folgendes:

Es ist $PtQ = Pti + itQ$
$$it\eta = itQ + Qt\eta$$
Daher $PtQ - it\eta = Pti - Qt\eta$.

Es wird daher der erhaltene Winkel $it\eta$ auf dem Meßtische, nicht dem wahren Winkel PtQ gleich seyn, wenn nicht $Pti - Qt\eta = 0$, d. h. der kleine Winkel Pti gleich ist dem kleinen Winkel $Qt\eta$.

5. Nun ist aber, weil pn mit ti, und $\pi\nu$ mit $t\eta$ parallel sind,
$$Pti = tPp$$
$$Qt\eta = tQ\pi.$$

Man fälle also auf die Visirlinien pn, $\pi\nu$, von t die Perpendiculärlinien tw, to herab, so ist $tw = to =$ der halben Breite des Diopterlinials. Wenn man diese $= c$, dann der Objecte P, Q Entfernungen von t, oder die Weiten $Pt = a$, $Qt = b$ setzt, so wird in den rechtwinklichten Triangeln Ptw, Qto, für den Sinus totus $= 1$.

Ein

$$\sin tPw = \frac{tw}{Pt} = \frac{c}{a}$$

$$\sin tQo = \frac{to}{Qt} = \frac{c}{b}.$$

Weil nun die Winkel tPw, tQo sehr klein
nd, wenn die Weiten Pt, Qt, in Absicht der
alben Breite der Regel sehr groß sind, so
nn man ohne merklichen Fehler setzen

$$\sin tPw = tPw$$
$$\sin tQo = tQo \text{ (Trig. S. VII.)}$$

Dieß giebt also die kleinen Winkel, (oder
re Bögen)

$$tPw = Pti = \frac{c}{a}$$

$$tQo = Qt\eta = \frac{c}{b}$$

Decimaltheilen des Sinus totus oder Halbe
ssers 1. Verlangt man sie in Secunden;
muß man die Werthe $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ noch mit der
hl 206264″ multipliciren, dieses giebt dem
h in Secunden

$$tPw = Pti = \frac{c}{a} \cdot 206264''$$

$$tQo = Qt\eta = \frac{c}{b} \cdot 206264$$

Miehin $Pti - Qt\eta = \frac{(b-a)}{ab} \cdot c \cdot 206264''$
$= PtQ - it\eta$ (4).

6. Exemp. Es sey

$Qt = b = 100$ Fuß $= 1000$ Zoll

$Pt = a = 50$ Fuß $= 500$ Zoll

die halbe Breite der Kegel oder $c = \frac{1}{2}$ Zoll, so wird

$$PtQ - it\eta = \frac{1000 - 500}{1000 \cdot 500} \cdot \frac{1}{2} \cdot 206264'' =$$

$$\frac{1}{2000} \cdot 206264'' = 103'' = 1', 43''.$$

Also wäre der falsche Winkel $it\eta$ auf dem Meßtische von dem wahren PtQ um $1'\,43''$ also beynahe um $2'$ unterschieden.

7. In diesem Beyspiele wäre nun freylich der Fehler, den man begienge, wenn man den Winkel $it\eta$ auf dem Meßtische für den wahren PtQ annähme, sehr unbeträchtlich, und auf dem Papiere, wo man die Linien ti, tη gewöhnlich mit dem Bleystifte ziehet, fast ganz unmerklich.

Indessen wäre doch besser, man begienge ihn gar nicht.

8. Er würde nur in dem Falle ganz verschwinden, wenn in der Formel für $PtQ - it\eta$
(5)

5) b = a, also die Objecte P, Q, gleich
weit von t entfernt wären.

Je ungleicher aber der Objecte P, Q, Ent-
fernungen von t sind, desto größer wird der
Fehler, und er kann allerdings von einer sol-
chen Beträchtlichkeit seyn, daß man ihn nicht
in allen Fällen für Null gelten lassen darf.

Es sey das Object Q sehr weit von t,
z. B. um 10000 Zoll entfernt, das andere
Object aber sehr nahe bey t, z. B. nur um
100 Zoll von t entfernt; also b = 10000,
a = 100, und wie vorhin $c = \frac{1}{2}$, so würde
jetzt der Fehler, oder der Unterschied

$$tQ - it\eta = \frac{10000 - 100}{10000 \cdot 100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 206264''$$
$$= 1021'' = 17' \cdot 1''$$ also über $\frac{1}{4}$ Grad.

Einen solchen Fehler kann man nicht in
allen Fällen für 0 gelten lassen.

9. Will man also dergleichen vermeiden, so
muß man sich einer dioptrischen Regel von der
ersten Gattung Fig. LXVIII. bedienen, wo
die Schärfe des Linials ik, längs der man
auf dem Meßtische die Linien ziehet, auch zu-
gleich die wahre Visirlinie darstellt, oder
sich in der dioptrischen Ebene (§. 93.)
findet.

10. Einige Schriftsteller, z. E. Hogreve (Landesvermessungen §. 16.) geben einige Bequemlichkeiten an, weswegen sie die dioptrische Regel (Fig. LXIX.) der erstern, (Fig. LXVIII.) vorziehen. Ich würde aber doch in jedem Falle mich lieber der dioptrischen Regel Fig. LXVIII. bedienen, da ihr Gebrauch vollkommen richtig ist, die Gegenstände, nach denen man visiret, mögen in Absicht des Punktes auf dem Meßtische liegen, wie sie wollen.

Auch Bugge bedient sich der auf der Mitte des Linials befindlichen Diopterm (§. 38. in oben §. 31. angeführten Schrift), und sucht zu beweisen, daß die daher rührende Fehler von keiner Erheblichkeit seyen.

Besser ist es doch wohl, wenn gar keine Fehler begangen werden, und da es eben so leicht ist, die Diopterm seitwärts als in der Mitte des Linials anzubringen, so sehe ich wenigstens nicht den geringsten Grund von der ersten Einrichtung abzugehen. Man müßte denn darin einen besondern Vortheil suchen, beyde Seiten des Diopterlinials zum Ziehen der Linien auf dem Meßtische anwenden zu können, wo denn freylich, wegen der Breite des Linials geringere Fehler zu besorgen sind, wenn die Diopterm auf der Mitte, also auf der halben Breite des Linials angebracht sind, als wenn sie zur Seite stehen. Aber wenn sie auf der

Mitte

Mitte stehen, so sind dann neue Fehler zu besorgen, wenn nicht beyde Schärfen oder Seiten des Linials, genau mit der Visirlinie längs der Mitte parallel sind. Daher man vor dem Gebrauche eines solchen Diopterlinials vorher die Untersuchung anstellen muß, ob auch genau jener Parallelismus statt findet, und hat man Fehler entdeckt, so müssen sich die Dioptern etwas verschieben lassen, um den Fehler zu corrigiren, welches nur neue Vorrichtungen erfordern würde. Ueber die Art jenen Parallelismus zu untersuchen s. m. Bugge a. a. O. §. 37. u. f. Gebraucht man dagegen nur immer eine und dieselbe Seite des Linials zum Ziehen der Linien, so fällt diese Untersuchung weg, weil wenn auch diese Seite nicht genau der Visirlinie parallel ist, ein Winkel zwischen zwey solchen Visirlinien, doch immer demjenigen auf dem Meßtische gleich seyn wird, welcher sich durch Ziehung der Linien längst jener Seite, ergeben hat. (Bugge a. a. O. §. 38. Anmerkung). Aber begreiflich ist es dann immer besser, wenn die Dioptern zur Seite stehen, also diese Seite zugleich der Visirlinie entspricht, als hingegen, wenn die Dioptern auf der Mitte des Linials angebracht sind, mithin die wegen der Breite des Diopterlinials entstehenden Fehler (3 — 9) zu besorgen sind.

11. Ob die dioptrische Ebene, auf der Ebene des Liniales selbst senkrecht stehe

(§. 111.), davon kann man sich versichern, wenn man das Diopterlinial auf einen genau horizontal gestellten Meßtisch legt, und nun untersucht, ob der Faden der Objectivdiopter beym Visiren nach einer an einer entfernten Wand genau lothrecht gezogenen Linie, diese Linie genau deckt. Andere zusammengesetztere Versicherungsmethoden sind ganz überflüssig. Man sehe indessen auch Bugge a. a. O. §. 37.

12. Wenn sich Kurzsichtige der bisher beschriebenen Diopterliniale bedienen wollen, so müssen sie ein Augenglas vor die Oculardiopter halten, welches freylich etwas unbequem ist. Man kann indessen leicht eine Vorrichtung anbringen, daß man nicht nöthig hat, das Augenglas mit der Hand zu halten.

Fernröhre, statt der Diopterliniale, beym Gebrauche des Meßtisches.

§. 112. Wer die Kosten anwenden will, kann, statt der Diopten, ein Fernrohr nach Art einer Kippregel (§. 100.) auf das Linial anbringen. Die Einrichtung muß aber so gemacht seyn, daß die Axe des Fernrohrs, oder die Visir-Ebene, der Schärfe ik (Fig. LXVIII.) entspreche, damit nicht die Fehler (§. 111. 5.) zu befürchten sind. Ein solches Fernrohr wird allerdings mehr Genauigkeit im Visiren verstatten, als ein bloßes Diopterli[nial]

nic[ht]

nial, und auch für Kurzsichtige bequemer seyn. Pirscher (coup d'oeil militaire. Berl. 1773.) giebt am Ende seines Buches eine Beschreibung eines neuen Meßtisches, wo er ebenfalls räth, sich eines Fernrohrs statt der gewöhnlichen Diopter zu bedienen, und ich muß ihm vollkommen in den Vorzügen beypflichten, welche er den Fernröhren ertheilt. Auch Branders Meßtisch ist mit einem Fernrohre versehen.

Um die Kosten zu ersparen, brauchen die Röhren, in welche die Gläser gefaßt werden, nicht einmal von Messing zu seyn, sondern man kann sie bloß von Holz verfertigen lassen. Und so würde ein solches Fernrohr nicht viel höher kommen, als ein Diopterlinial, welches ganz von Messing wäre.

Die Kippregel zu prüfen, ob sie sich in einer auf das Linial senkrechten Ebene auf- und niederbewege, wird (§. 147) gewiesen.

Die Wasserwaage, wodurch man den horizontalen Stand des Meßtisches erfährt.

§. 113. Da in der Feldmeßkunst die Winkel und Seiten einer Figur immer auf den Horizont reduciret werden müssen (§. 4), so ist zu

dieser Absicht nothwendig, daß man dem Meß-tische eine horizontale Lage geben könne, damit die Winkel, die man auf demselben erhält, Horizontalwinkel sind. Den horizontalen Stand einer Ebene, erfährt man aber vermittelst einer darauf gesetzten **Wasserwaage**. Dieses Werkzeug bestehet Fig. LXXI. aus einem cylindrischen Gefäße A, von etwa 3 Zoll im Durchmesser, mit einem Deckel bcd von geschliffenem Glase, den man nach Gefallen ab- und anschrauben kann. Dieses Gefäß wird alsdann mit Wasser oder noch besser mit Weingeist angefüllet, und mit dem Glasdeckel fest verschlossen; durch den Boden geht ein Schräubchen g. Wenn man dieses herausschraubt, und durch die entstandene Oeffnung etwas Wasser aus dem angefüllten Gefäße heraus läßt, und alsdann die Oeffnung wieder verschließt, so wird sich statt des herausgelassenen Wassers, oben unter dem Glasdeckel eine Luftblase i zeigen, durch deren Hin- und Herspielen die Oberfläche des Wassers in dem Gefäße angezeigt wird.

Ist nun der Glasdeckel mit der Grundfläche des cylindrischen Gefäßes parallel, und man setzt das Gefäß auf eine ebene Fläche, so wird die Luftblase i unter dem Mittelspunkte des Glasdeckels erscheinen, wenn die ebene Fläche, auf der das Gefäß steht, horizontal, also mit der Wasserfläche in dem Gefäße parallel ist. Bey jeder andern gegen den Horizont geneigten

Lage

Lage wird hingegen die Blase nicht unter dem Mittelpunkte des Glasdeckels bleiben.

Wenn also dieses cylindrische Gefäß A auf die Fläche eines Meßtisches gesetzt wird, und die Blase begiebt sich nicht unter den Mittelpunkt des Glasdeckels, so muß man den Meßtisch so lange in der Nuß herumwenden, bis er den horizontalen Stand hat, welchen er in dem Augenblicke bekömmt, da die Luftblase unter dem Mittelpunkte des Glasdeckels stehen bleibt.

Wenn man hierauf die Schrauben y. y. fig. LIV. Tab. IV. sanft bis unter das Tischblatt schraubt, so wird man den Meßtisch in seiner Horizontal-Lage unverrückt erhalten können. Auch liesse sich selbst, vermittelst dieser Schrauben, eine kleine Verrückung aus der Horizontal-Lage sogleich wieder herstellen. (§. 108. 6.)

Die nothwendigen Erfordernisse einer guten Wasserwaage sind folgende: Erstlich, muß die Fläche des Glasdeckels mit der Grundfläche des cylindrischen Gefäßes vollkommen parallel seyn. Diese Bedingung ist nicht ganz leicht zu erhalten. Indessen mag eine geringe Abweichung bey dem gewöhnlichen Feldmessergebrauche immer verstattet seyn. Man s. unten (§. 141. VIII). Zweytens, muß die Blase sehr empfindlich seyn, d. h. die geringste Neigung des Gefäßes muß ihr eine Bewegung

mittheilen. Es ist nicht gleichgültig, was man der Blase für eine Größe giebt. Ist sie ga zu klein, so fehlt ihr die nöthige Empfindlich keit, indem sie sich zu sehr an den Deckel hängt. Man könnte zwar die vortheilhafteste Grö derselben durch Versuche bestimmen, indeß wir in den meisten Fällen ein Durchmesser von 5 bis 6 Linien vollkommen genügen. Auch mu der Glasdeckel innen etwas hohl geschliffen seyn, aber dies darf nur sehr wenig betragen, so daß das Glas kaum von einem ebenen zu unterscheiden ist. Zugleich benimmt man dem Glase durch das Schleifen noch die natürlichen Ungleichheiten, die der Bewegung und Empfindlichkeit der Blase nachtheilig seyn würden. Es ist besser wenn die abgeschliffene Fläche nicht völlig polirt, sondern etwas matt gelassen wird. Den Mittelpunkt des Glasdeckels bemerkt man mit einem Zeichen. Die Höhe des cylindrischen Gefäßes mag etwa 1 oder $1\frac{1}{2}$ Zoll betragen. Das Gefäß selbst wird von Messing verfertigt. Man hat noch verschiedene andere Arten von Wasserwaagen die aber zum Gebrauch des Meßtisches eben nicht angewandt zu werden pflegen.

Der Erfinder des Meßtisches.

§. 114. Ist Joh. Prätorius, ehemaliger Prof. der Mathematik zu Altdorf. Begreiflich war dies Werkzeug anfangs sehr unvollkommen, wie man aus Schwenters pract.

pract. Geometrie, P. III. ersehen kann. Prätorius starb ums Jahr 1616.

Vortheile eines Meßtisches.

§. 115. Die Erfindung dieses Werkzeugs gehört ohne Zweifel mit zu den wichtigsten in der practischen Geometrie, weil es den so grossen Vortheil verschafft, daß man eine Figur, die man in Grund legen will, sogleich unmittelbar aufs Papier bekömmt, und sich also dadurch ein weitläuftiges Diarium erspart. Bey allen übrigen geometrischen Werkzeugen muß man beständig ein Diarium zur Hand haben, um die gemessenen Linien und Winkel aufzuzeichnen; wenn man nun darinn keine gute Ordnung hält, so entsteht nachher beym Auftragen zu Hause oft grosse Verwirrung, zumahl wenn man es einige Zeit anstehen läßt. Ja viele Umstände einer Vermessung würden dem Gedächtnisse entfallen, wenn man nicht den Vortheil hätte, sie sogleich auf den Meßtisch zu bringen.

So groß aber der Nutzen dieses Werkzeugs ist, so muß man doch auch die Gränzen seines Gebrauchs zu beurtheilen wissen.

Wollte man eine Landschaft von 6 und mehreren Quadratmeilen, bloß mit diesem Werkzeuge vermessen, und sie aus lauter e-

Planen zusammensetzen, ohne ein Astrolabium zu Hülfe zu nehmen, um dadurch erst mehrere Hauptpunkte und Linien, oder das sogenannte Gerippe der Landschaft trigonometrisch zu entwerfen, so würde sicher nichts als Flickwerk zum Vorschein kommen.

Der Meßtisch soll eigentlich nur zur Aufnahme des Details der Landschaft dienen, aber jene trigonometrische Operationen sind erforderlich, dies Detail zu einem richtigen Ganzen zu vereinigen. Wie dies geschehen könne, wird die Folge lehren. Indessen hat die Vernachlässigung dieser Methode schon sehr unglückliche Messungen hervorgebracht, wie ich in Beyspielen zeigen könnte, und woran auch überhaupt Niemand zweifeln wird, der sich einigermaaßen mit grossen Feldmesserarbeiten beschäfftigt hat, und die mannichfaltigen Schwierigkeiten, ein richtiges Ganze zu erhalten, aus Erfahrungen kennt. Die Kenntnisse eines Feldmessers müssen dann freylich etwas weiter, als bis zum pythagorischen Lehrsatz gehen. Aber grosse Messungen sollten auch keinen gemeinen Feldmessern allein aufgetragen werden.

Die Zollmannische Scheibe.

§. 116. Dies ehemals sehr berühmte, und bey vielen Feldmessern noch jetzt beliebte Werkzeug, hat eine Aehnlichkeit mit dem Meßtische

sche, nur daß statt eines viereckigten Reiss-brettes eine runde von guten dauerhaften trockenen Holze verfertigte, und mit Papier überzogene Scheibe auf dem Stative angebracht wird.

Um den Mittelpunkt dieser Scheibe dreht sich eine Alhidadenregel mit Diopteren, oder noch besser mit einem Fernrohre, um aus dem Mittelpunkte Linien nach den visirten Gegenständen ziehen zu können. Diese Linien brauchen aber vom Mittelpunkte selbst nicht ausgezogen zu werden. Es ist hinlänglich wenn man nur die Richtung einer jeden solchen Linie an dem Umfange der Scheibe an zwey um einen Durchmesser der Scheibe von einander entfernten Stellen, mit Bleystiftlinien bemerkt, und so nur die Lagen dieser Linien bezeichnet, wodurch denn nachher zu Hause, die Winkel, die sie im Mittelpunkte des Werkzeugs mit einander machen würden, an die gehörigen Punkte einer zu entwerfenden Figur selbst abgetragen werden können.

Dadurch wird also der Gebrauch dieses Werkzeugs demjenigen des Astrolabii ähnlich, und der Unterschied besteht nur darinn, daß die Winkel von je zwey solchen Visirlinien, auf dem Rande des Astrolabii, würklich in Graden und Minuten 2c. gemessen, auf dem Umfange der Scheibe hingegen diese Visirlinien selbst nur ihren Lagen nach angegeben werden.

Bey dem Gebrauche des Astrolabii, werden die beobachteten Winkel vermittelst des Transporteurs und anderer bekannten Methoden, an die gehörigen Punkte der zu entwerfenden Figur abgetragen. Beym Gebrauche der Scheibe geschieht dies dadurch, daß man das Blatt Papier, worauf die visirten Schenkel dieser Winkel sich befinden, von der Schreibe abnimmt, es auf ein reines Blatt Papier aufklebt, und nun diese Schenkel durch Hülfe eines Parallellinials, oder hölzerner Dreyecke, an die gehörigen Punkte des Umfangs der auf dem untern Blatt Papier zu entwerfenden Figur abschiebt (Man s. unten im 2ten Theil dieser pract. Geom. §. 237 und Zollmanns Geodäsie. (Halle 1744) daselbst im 3ten Kap. §. 122. u. f.)

Auf diese Art unterscheidet sich die Anwendung der Scheibe zu geodätischen Messungen, von derjenigen des Meßtisches darinn, daß bey jener das Auftragen der Winkel, wie beym Gebrauche des Astrolabii erst zu Hause geschieht, da hingegen auf dem Meßtische die Winkel sogleich selbst an den gehörigen Punkten der zu entwerfenden Figur erhalten werden, wobey sich denn auf dem Felde freylich oft ereignet, daß Standpunkte und Winkel etwas nahe an den Rand des Meßtisches hinfallen, und, um die Messung fortsetzen zu können, entweder frisches Papier aufgezogen, oder eine andere bereits über-

überzogene Tischplatte zu Hülfe genommen werden muß.

Da bey der Messungsart mit der Scheibe alle Winkel am Mittelpunkte des Werkzeugs erhalten werden, und der Auftrag erst zu Hause geschieht, wo zum Zeichnen der Figur ein hinlänglich großes, erforderlichen Falles aus mehreren zusammengeleimten Bogen bestehendes Papier angewandt werden kann, so glaubt man hierin einen Vorzug der Messungsart mit der Scheibe vor der gewöhnlichen mit dem Meßtische zu finden, daß die Scheibe verstattet, eine Messung auf dem Felde, so weit man will, fortsetzen zu können, ohne wie bey dem Gebrauche des Meßtisches durch Mangel an Raum auf der Tischplatte daran verhindert zu werden. Denn es ist klar, daß viele hundert Visirlinien auf dem Rande der Scheibe notirt werden können, ehe derselben so viel werden, daß man es aus andern Gründen nöthig findet, neues Papier aufzuziehen.

So glaubt man denn auch der Scheibe wieder einen Vorzug vor dem Astrolabio ertheilen zu dürfen, weil man die Winkel auf dem Felde unmittelbar auf dem Papiere erhält, und nicht nöthig hat, Gradabtheilungen auf dem Rande abzulesen, wodurch, wie auch beym Abtragen der gemessenen Winkel vermittelst des Transporteurs u. dergl. mancherley Fehler begangen werden könnten.

Allein wenn man diese angeblichen Vortheile der Scheibe genau erörtert, so sind sie nur scheinbar. Denn erstlich unterscheidet sich die Scheibe wesentlich von dem Meßtische nicht, als nur in der Methode sich derselben zu bedienen. Die runde Gestalt dieses Werkzeugs, und daß sich auf demselben das Diopterlinial um einen festen Punkt dreht, macht zur Sache nichts. Kann man nicht auch auf dem viereckigten Meßtische, die bey der Scheibe gebräuchliche Messungsart, nemlich alle Winkel an einem und demselben Punkte zu erhalten, wenn man es nöthig findet, anwenden, das Papier von dem Meßtische abnehmen, und die Winkel zu Hause vermittelst eines Parallellinials auf ein anderes Blatt Papier abschieben? Im Grunde vermißt man aber bey der Scheibe den Vortheil, den man eigentlich von dem Meßtische hat, nemlich sich ein weitläuftiges Diarium zu ersparen, und eine ganze Figur mit ihrem Detail sogleich auf dem Papiere zu erhalten, ohne sie erst zu Hause austragen zu dürfen. Daß der Raum auf dem Meßtische öfters nicht hinreicht, sogleich auf dem Felde die ganze Figur zu erhalten, kann doch wohl keinen hinlänglichen Grund abgeben, der Scheibe, und der Messungsart mit derselben, einen Vorzug vor derjenigen mit dem Meßtische zu ertheilen, da es ein leichtes ist, frisches Papier auf den Meßtisch aufzuziehen, oder einen zweyten bereits überzogenen

in

n Bereitschaft zu haben, und ihn auf das Stativ zu stellen.

Und was nun die angeblichen Vortheile der Scheibe vor dem Astrolabio betrifft, so wollen auch diese nichts sagen. Denn auch auf einem mäßig guten Astrolabio, lassen sich im Ablesen der Gradabtheilungen ja leicht Fehler von 2 bis 3 Minuten vermeiden. Aber so genau auf der Scheibe, wo man die Linien mit Bleystift zieht, Winkel zu erhalten, und sie nachher vermittelst eines Parallelinials an andere Punkte zu bringen, mögte wohl sehr schwer halten. Und was beym Gebrauche des Astrolabii das Abtragen der Winkel vermittelst eines Transporteurs betrifft, so können ja auch die hiebey zu befürchtenden Fehler leicht vermieden werden, wenn man entweder einen hinlänglich großen Transporteur anwendet, oder die Winkel nach andern bekannten Methoden aufträgt.

Ueberhaupt kann denn doch die Scheibe auch nur zu kleinen Messungen gebraucht werden. Bey Operationen die ins Große gehen, und Trigonometrie erfordern, ist nöthig, daß man die eigentliche Größe der Winkel in Graden und Minuten wisse, und diesen Vortheil vermisset man bey der Scheibe.

Um sie daher auch zu trigonometrischen Arbeiten gebrauchen zu können, läßt Zollmann ihren Umfang noch mit einem in Grade eingetheilten messingenen Ringe versehen, der durch Schrauben auf die Scheibe befestigt, bey gewöhnlichen Gebrauche derselben aber abgenommen werden kann. Dies ist die verbesserte Zollmannische Scheibe (Zollm. Geodäsie §. 102. ꝛc.)

Allein, da man zum Detail einer Messung doch ein für allemahl den Meßtisch nicht gut entbehren kann, und ein Astrolabium ohnehin zu vielen geometrischen Arbeiten erforderlich ist, so wird man doch wohl lieber jedes Werkzeug für sich allein besitzen, als beyde auf eine sehr unvollkommene Art in der Zollmannischen Scheibe vereinigt sehen. Denn diese Scheibe ist weder ein vollkommener Meßtisch, noch ein vollkommenes Astrolabium, und sie müßte von einer sehr zusammengesetzten Einrichtung seyn, wenn sie das, was man von einen vollkommenen Meßtische, und Astrolabio verlangt, vereinigen sollte.

Es kann demnach die Scheibe in der practischen Geometrie auch nach der Zollmannischen Verbesserung immer als ein sehr entbehrliches Werkzeug angesehn werden. Und was die Messungsmethode mit derselben anbelangt, in die man den Hauptvortheil dieses Werkzeugs

zeugs setzt, so kann ja solche, wenn man es für nützlich halten sollte, immer auch bey dem Meßtische angewandt werden, wie aus dem 237ten § dieser practischen Geom. mit mehreren zu ersehen ist.

Zollmann sagt, der Erfinder der Scheibe sey unbekannt, man finde aber schon Spuren davon in Speklings (Daniel Speckles) Festungsbau 1608., und in Dillings Kriegsbuch P. I. lib. II. cap. 37.

Die eigentliche Messungsart mit der Scheibe kann man übrigens umständlich in Zollmanns Geodäsie nachsehen. Eine Art eines Auszuges daraus ist: Ausführlicher Unterricht zur Feldmessungskunst, oder Scheibenmessung von Ch. H. W(erner), (Langensalza, 1776. 8.) Das Verfahren ist auch kurz und gut in der zu Göttingen 1783. herausgekommenen Schrift (Anleitung zum Aufnehmen und Zeichnen der Gegenden, vorzüglich zum militärischen Gebrauch, von einem Officier) S. 167 ꝛc. erläutert.

Gebrauch der Magnetnadeln in der Feldmeßkunst.

§. 117. Ehe wir hievon handeln, müssen wir vorher aus der mathematischen Geographie eini-

einige Sätze beybringen, die sowohl zum richtigen Gebrauche der Magnetnadeln, als auch in der Folge zu andern Absichten in der Feldmeßkunst unentbehrlich sind.

Einige Lehrsätze und Erklärungen aus der mathematischen Geographie.

1) Unsere Erde ist ein runder Körper, der einer Kugel ziemlich nahe kömmt. In der Feldmeßkunst ist es aber verstattet, unsere Erde als eine völlige Kugel zu betrachten, ohne daß aus dieser Voraussetzung ein merklicher Fehler zu befürchten wäre.

Eigentlich hat unsere Erde die Gestalt eines zusammengedrückten Sphäroids, eines Körpers, der ohngefähr entstehen würde, wenn man eine Kugel von einer weichen Materie, z. E. von Thon, etwas zusammendrückte; oder bestimmter, wenn sich eine Ellipse um ihre kleine Axe herumdrehte.

Die Durchmesser unserer Erde sind also nicht durchaus gleich groß. Der kleinste verhält sich zum größten = 178 : 179, welches letztere Verhältniß *Bouguer* angegeben hat. Verschiedene Mathematikverständige geben das Verhältniß 202 : 203, andere 248 : 249 u. s. w. die neuesten Bestimmungen sogar nur 334 : 335 an. (v. Zachs monatl. Corresp. August. 1812.

S.

S. 130.) Jedes dieser Verhältnisse zeigt, daß man zu geodätischen Gebrauche die Abweichung von der wahren Kugelgestalt ohne merklichen Fehler beyseite setzen könne.

Aus den Abmessungen verschiedener Grade auf der Erdfläche, lehrt die Geometrie die eigentliche Größe des größten und kleinsten Durchmessers der Erde zu finden. Sie sind in französischen Toisen, z. B. nach MAUPERTUIS *Elemens de Geographie* am Ende, und BOUGUER *Fig. de la Terre* sect. 6. art. 39. folgende:

	Größter Durchm.	Kleinst. Durchm.
MAUPERT.	6562480. Toisen.	6525600 Toisen.
BOUGUER.	6562026 —	6525377 —

Man nimmt aber gewöhnlich ohne merklichen Irrthum, die Erde für eine vollkommene Kugel an, deren Durchmesser das Mittel zwischen dem größten und kleinsten Durchmesser der Erde wäre. Das gäbe also (nach dem Mittel aus Maupertuis Angaben) ihren Durchmesser = 6544040 Toisen. Daraus kann man nun den ganzen Umkreis der Erde finden, und folglich auch die Länge des Grades eines größten Kreises, welcher = 57107, 5 Toisen wird.

Dieß wäre die Länge eines Grades auf der Erde, wenn man sie als eine vollkommene Kugel betrachtete. Da sie aber ein zusammengedrücktes elliptisches Sphäroid ist, so sind die Grade

Grade nicht durchaus gleich. In DE LA LANDE Astronomie §. 2691. und Bodens Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel. Berlin 1786. §. 128. findet sich eine Tafel der Längen verschiedener Grade, wie solche von berühmten Mathematikverständigen durch unmittelbare Messung auf unserer Erde gefunden worden sind.

Hr. Prof. Klügel in Halle hat in einigen Aufsätzen, welche in Hrn. Prof. Bodens astronomischen Jahrbüchern von 1787 und 1788 zu finden sind, gezeigt, daß die gemessenen Grade auf der Erde keine ganz regelmäßige elliptische Krümmung der Oberfläche der Erde anzunehmen verstatten, sondern jedes Paar von Graden, für die Durchschnittsfigur der Erde durch ihre Axe, eine andere Ellipse giebt, daß aber eine Ellipse, deren grösserer Durchmesser = 6559982 Toisen, der kleinere = 6524894 Tois. wäre, am wenigsten von der wahren Figur der Erde abweichen würde. Dieß gäbe demnach das Mittel zwischen beyden Durchmessern = 6542438 Toisen. Diese Größe könnte man für den Durchmesser einer Kugel nehmen, welche demnach nicht viel von der wahren Größe der Erde abweichen würde. Die Länge eines Grades auf dieser Kugel würde aber alsdann 57093 Toisen betragen. Hr. Prof. Klügel nimmt indessen eine Kugel an, deren Umfang dem mittlern Umfange der Erde gleich

wäre

wäre, und berechnet hieraus die Größe eines Grades auf dieser Kugel = 57173,5 Toisen = 343041 paris. Fuß, also

1 Minute = 5717,35 Fuß,
1 Secunde = 95,289 Fuß.

Man nennt den 15ten Theil eines Grades eines größten Kreises auf der Erdkugel eine deutsche, oder auch wegen ihres häufigen Gebrauches in der math. Geographie, eine geographische Meile. In diesem Verstande sagt man, daß 15 deutsche Meilen einen Grad ausmachen.

Nimmt man einen solchen Grad auf der Erdkugel zu 57107,5 Toisen an, so kommen auf eine deutsche Meile 3807,2 Tois. Da nun eine Toise 6 pariser Fuß hält, und das Verhältniß des pariser Fußes gegen andere Fußmaaße, aus der Tabelle §. 14. zu ersehen ist, so läßt sich berechnen, wie viel Fuße eines andern Maaßes auf eine solche deutsche Meile kommen. Sie würde z. E. nach gehöriger Berechnung 23643 rheinl. Fuß betragen. Nähme man aber einen Grad nach der Klügelischen Bestimmung zu 57173,5 Toisen, so würde 1 geographische Meile 3811,6 Toisen = 23661 rheinl. Fuß.

II) Der Umfang der Erde, als Kugel betrachtet, wäre 360 . 15 = 5400 Meilen, mithin der Durchmesser = 1720 deutschen M.

Bey einer so grossen Kugel kann ein kleines Stückchen ihrer Oberfläche, z. E. ein Distrikt von 6 und mehreren Quadratmeilen ohne merklichen Fehler als eine Ebene angesehen werden.

III) Unsere Erde drehet sich täglich um eine unveränderliche Axe, die man die Erdaxe nennet. Sie ist der kleinste von den beyden Durchmessern (I). Die beyden Punkte A, P, Fig. LXXII. Tab. VI. wo die Erdaxe in die Oberfläche der Erdkugel eintrifft, heissen Erdpole. Jeder Punkt der Erdfläche, z. E. m beschreibt bey Umdrehung der Erde um die Axe AP, einen gewissen Kreis mn, dessen Ebene auf AP senkrecht steht. Je näher m beym Pole A oder P liegt, einen desto kleinern Kreis beschreibt er, die Pole selbst aber bleiben unbeweglich. Alle diese Kreise sind mit einander parallel, weil sie insgesammt auf der Erdaxe AP senkrecht stehen, und heissen deswegen Parallelkreise. Der größte Parallelkreis owtp wird also derjenige seyn, der von einem Punkte o beschrieben wird, welcher von beyden Weltpolen A, P, um 90° absteht, oder für den Ao = oP = 90° ist. Er heißt der Aequator.

A wird der Nordpol genannt, wenn oAp die Halbkugel ist, in der wir Europäer wohnen. Der gegenüberstehende Pol P heißt der Südpol.

IV)

IV) Wenn nun μ nach Gefallen ein Punkt auf der Erdfläche ist, so nennt man den größten Kreis $A\mu P$, den man sich durch den Ort μ, und die beyden Pole A, P, vorstellt, den **Mittagskreis** des Orts μ. Die Ebene dieses Kreises wird aber die **Mittagsfläche** genannt.

So hat also jeder Ort auf der Erde seinen eigenen Mittagskreis: Alle Mittagsflächen durchschneiden sich aber in der Erdaxe AP.

Es sey ν ein anderer Ort und $A\nu P$ dessen Mittagsfläche, so heißt der Winkel, unter dem sich die beyden Mittagsflächen $A\mu P$, $A\nu P$ einander durchschneiden, **der Winkel** oder **der Unterschied** beyder Mittagsflächen. Diesen Neigungswinkel beyder Mittagsflächen bestimmt man, wenn aus dem Mittelpunkte der Erdkugel C nach den Durchschnittspunkten w, t, der Mittagskreise mit dem Aequator, die Halbmesser Cw, Ct, gezogen werden, dann ist der Winkel wCt, der gesuchte Neigungswinkel der Ebenen $A\mu wP$, $A\nu tP$. (Man s. **Kästn. Geom.** 52. S. 1. 2. 3. Zus.)

V) Wenn man sich ein paar ebene Flächen vorstellt, die die Erdfläche bey μ und ν berühren, so sind diese Ebenen, der Oerter μ, ν Horizontalflächen, weil sie auf den Halbmessern $C\mu$, $C\nu$, oder auf den Richtungen der Verticallinien

der Oerter μ und ν, senkrecht stehen (§. 4.) Die Mittagsflächen $A\mu P$, $A\nu P$, werden nun die gedachten Horizontalflächen in ein paar geraden Linien durchschneiden. Eine solche Durchschnittslinie der Mittagsfläche eines Orts mit desselben Horizontalfläche, heißt des Orts **Mittagslinie**.

So hat also jeder Ort auf der Erdfläche seine eigene Mittagslinie.

Wenn man sich nun in den Ebenen der erwähnten Mittagskreise ein paar gerade Linien gedenkt, die die Mittagskreise an den Punkten μ und ν berühren, so werden diese Berührungslinien oder Tangenten selbst die Richtungen der Mittagslinien der Oerter μ und ν darstellen.

Die Richtungen dieser Mittagslinien werden in den wenigsten Fällen mit einander parallel seyn. Je näher indessen die Oerter μ, ν nach dem Aequator zu liegen, desto mehr werden auch die Tangenten an μ und ν, also die Mittagslinien, gleichlaufend. Liegen die Oerter μ und ν weit vom Aequator (doch nicht zu nahe am Pole), so werden ihre Mittagslinien nur in dem Falle sich dem Parallelismus nähern, wenn μ und ν auch unter sich selbst nicht weit von einander entfernt sind, und dieß ist dann der gewöhnliche Fall in der practischen Geometrie.

VI)

VI) Der Bogen μw des Mittagskreises von dem Orte μ, bis an den Aequator, heißt des Orts μ Breite. Sie ist nördlich oder südlich, je nachdem μ in der nördlichen oder südlichen Halbkugel liegt.

Folgerung aus dem bisherigen.

§. 118. 1. Es seyen die Punkte A, B, C, Fig. LXXIII. nicht gar zu weit von einander entfernte Oerter auf der Erdfläche, und die durch A, B, C, gezogenen geraden Linien gh, ik, lm, seyen die Mittagslinien dieser Oerter, so erhellet, daß eine nach Gefallen gezogene gerade Linie GH, diese Mittagslinien, (weil sie ohne großen Fehler parallel sind (§. 117. V.)) insgesammt unter lauter gleichen Winkeln durchschneiden wird.

2. Diese Betrachtung, daß die Mittagslinien innerhalb eines kleinen Stücks der Erdfläche eine Reihe von Parallellinien darstellen, ist in der practischen Geometrie von vielem Nutzen, es ist also nöthig zu zeigen:

Wie man an einem gewissen Orte auf der Erdfläche die Richtung der Mittagslinie bestimmen könne.

Diese Aufgabe aufzulösen, giebt es unterschiedene Mittel, die aber alle auf astronomischen Gründen beruhen.

Man stelle sich vor, die Horizontalebene, so wie auch die Ebene des Mittagskreises eines gewissen Orts auf der Erdfläche, würden ohne Ende hinaus bis an die Himmelskugel erweitert, so werden solche wegen der Umdrehung der Erde um ihre Axe in jedem Augenblicke durch andere und andere Punkte der Himmelskugel gehen. Geht nun die erweiterte Horizontalebene des Orts z. B. durch einen gewissen Stern, so wird in dem Augenblicke, da dieses geschieht, der Stern im Horizonte des Orts sich befinden, d. h. er wird entweder auf= oder untergehen. Geht er z. B. auf, so wird er bald darauf, schon über der Horizontalfläche seyn, und sich nach und nach immer mehr über dieselbe erheben, so wie die erweiterte Horizontalfläche, den erwähnten Stern bey der fernern Umdrehung der Erdkugel verläßt. Dagegen werden nach und nach andere und andere Sterne in diese Horizontalfläche kommen. Hat sich die Erdkugel so weit umgedreht, daß nunmehr die erweiterte Mittagsfläche des Orts durch den Stern geht, dann steht der Stern am höchsten über dem Horizonte, und man sagt, daß er nunmehr kulminire, oder durch die Mittagsfläche gehe. So bald das geschehen ist, wird er sich der erwähnten Horizontalfläche allmählig wieder nähern, bis er zum zweytenmale in dieselbe gelangt, da er dann untergehen, und nun eine Zeitlang unter dem Horizonte verweilen wird, bis er den folgenden Tag abermahls

iahls aufgeht, und also wieder in der erwei:
:rten Horizontalebene sich befindet, da dann
ieselben Erscheinungen wieder von vorne an:
ingen.

Ist der gedachte Stern die Sonne, und
ẞt man, die Sonne bescheine einen vertical:
ehenden Gegenstand, z. B. einen Stab, so
ird dieser Gegenstand auf der Horizontalfläche
nen Schatten hinter sich werfen, welcher desto
irzer wird, jemehr sich die Sonne über dem
orizonte erhebt; geht die Sonne durch die
Mittagsfläche, so wird der Schatten am kür:
sten seyn. In gleichen Zeiten vor und nach
:m Durchgange der Sonne durch die Mittags:
äche, wird aber allemahl, sowohl ihr Abstand
on der Mittagsfläche, als auch ihre Erhöhung
ber dem Horizonte gleich seyn, mithin auch der
Schatten jenes Stabes von gleicher Länge seyn,
nd die Mittagsfläche wird demnach den Win:
l zwischen zwey gleichlangen Schatten halbi:
n. Hierauf gründet sich

Die gewöhnliche und leichteste Methode,
ermittelst eines solchen Schattens,
ne Mittagslinie zu ziehen. Man beschreibe
1f einer ebenen, unbeweglichen, genau
orizontal gestellten Fläche, aus dem
Mittelpunkte g (Fig. LII.) einen Kreis mit ei:
m willkührlichen Halbmesser, und richte durch
ssen Mittelpunkt g einen Stift lothrech:

auf. Ich setze nun, daß der erwähnte Kreis von der Sonne beschienen werden könne. Man gebe also Acht, wenn Vormittags der Schatten des Stiftes sich in dem Umfange des Kreises bey i endigt, folglich die Länge des Schattens = gi ist, und bemerke auf dem Umkreise genau den Punkt i. Eben so bemerke man bey l genau den Punkt, wenn Nachmittags sich der Schatten des Stiftes abermahls in dem Umkreise endigt, folglich zum zweytenmahle dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Dann halbire man bey n den Bogen inl, und ziehe durch den Mittelpunkt g die gerade Linie gn, so wird diese eine Mittagslinie seyn, die man sofort nach Gefallen verlängern kann.

Da in der Beobachtung der gleich-großen Schatten, leicht kleine Fehler vorfallen können, so kann man die Mittagslinie noch genauer finden, wenn man aus dem Mittelpunkte g, eine ganze Reihe concentrischer Kreise ziehet, und beobachtet, wo in jedem Umkreise sich Vor- und Nachmittags der Schatten des Stiftes endigt, hierauf allemal den Bogen zwischen den Endpunkten zweyer gleich langer Schatten halbirt; denn alle Linien, die solchergestalt in die Mitte zwischen zwey gleich langen Schatten fallen, werden Mittagslinien seyn, und müssen nothwendig in eine einzige gerade Linie zusammenfallen, wenn nicht kleine Fehler der Beobachtung vorgefallen sind.

Das

Das bisherige Verfahren bedarf, wegen der zenen Bewegung der Sonne, einer kleinen erbesserung, wenn man nicht eine Zeit um n längsten Tag herum dazu wählt. Indes: i ist es zum gewöhnlichen Gebrauche der practischen Geometrie auch ohne diese erbesserung zureichend genau. Ferner müssen : Beobachtungen der Schatten auch nicht zu :it vom Mittage entfernt seyn, damit nicht r Halbschatten verhindere, die Gränze des ahren Schattens, auf den gezogenen Umkrei: i, genau zu bestimmen. Am sichersten verfährt an, wenn die Schatten ohngefähr 2 bis 3 tunden Vor: und Nachmittags beobachtet rden.

Statt eines durch g lothrecht aufzurichten: n Stiftes, kann man sich auch eines senkrech: i etwa 1 Fuß hohen Kegels von Bley oder tem Holze bedienen, den man auf die horizon: :e Fläche, worauf die concentrischen Kreise ge: zen sind, so setzt, daß der Mittelpunkt der rundfläche desselben, genau in den Mittelpunkt e concentrischen Kreise zu liegen komme. Dann merkt man auf den erwähnten Kreisen Vor: d Nachmittags, den Schatten von der Spitze s Kegels, und verfährt, wie vorhin.

Andere lassen die Sonnenstrahlen durch ein ines kreisrundes Loch in einer metallenen Plat: , auf eine Horizontalfläche fallen. Nun wird

vom Mittelpunkte dieses Lochs ein Senkel auf die Horizontalfläche herabgefällt, um das Centrum zu den concentrischen Kreisen zu bekommen, auf deren Peripherien man alsdann die Stellen bemerkt, wo Vor- und Nachmittags der durch jene Oeffnung fallende Sonnenstrahl hintrifft. Man verfährt hierauf, wie oben mit dem Schatten, um die Lagen der Mittagslinien zu erhalten.

Mehrere Methoden, Mittagslinien zu ziehen, findet man in astronomischen Büchern. Z. B. DE LA LANDE *Astronomie* (Paris 1771.) §. 155. 160. §. 2579. CASSINI *elemens d'Astronomie.* Kästners astronom. Abh. 1. Samml. 3te Abhandl. §. 68. Röstens astron. Handbuch. Röslers practische Astronomie, u. s. w.

Auch im dritten Bande dieser practischen Geometrie §. 365. wird noch verschiedenes, die Ziehung der Mittagslinien betreffendes, beygebracht.

3. Meistens bedient man sich in der Feldmeßkunst der Magnetnadeln, ohngefähr die Richtungen der Mittagslinien anzugeben.

Es lehret nemlich die Erfahrung, daß,

Wenn man eine stählerne Nadel mit einem Magnete bestreicht, und sie so einrichtet, daß sie

le sich horizontal und frey auf einem Stifte
erumdrehen kann, sie sich von selbst in eine
Richtung begiebt, welche mit den Mittagslinien
icht zu weit von einander entfernten Oerter
eynahe einerley Winkel macht. Gesetzt Fig.
.XXIII. sey Aα die Richtung der Magnetna-
el an dem Orte A, so wird solche mit der Mit-
agslinie hg dieses Orts einen gewissen Winkel
αAg machen. Bringt man die Magnetnadel
n den Ort B, der von dem A nicht gar zu
veit entfernt ist, so wird ihre Richtung Bβ
nit der Mittagslinie ik des Orts B, einen
Winkel βBi machen, der beynahe so groß ist,
ls der, welchen sie mit der Mittagslinie des
)rts A machte.

Und eben so wird an dem Orte C, der
Winkel γCl = βBi = αAg, wenn Cγ die
Richtung der Magnetnadel ist.

4. Dieses lehrt die Erfahrung, und läßt
ch durch Versuche bestätigen, wenn man an
erschiedenen, nicht weit von einander liegenden
)ertern, vermittelst astronomischer Methoden,
ie (2), Mittagslinien ziehet, und die Winkel
nisset, welche die Richtung der Magnetnadel
nit den Mittagslinien macht. Z. E. in Göt-
ngen macht die Richtung der Magnetnadel
nit der Mittagslinie einen Winkel von 16½ Grad
m Jahre 1777; jetzt 1813 sehr nahe an
o Grad.) Eben den Winkel wird die Mag-

netnadel auch mit den Mittagslinien solche Oerter machen, die nahe um Göttingen liegen.

5. Wenn man also an einem gewissen Ort z. E. A, den Winkel α A g der Magnetnadel mit der Mittagslinie weiß, so kann man sogleich an einem andern von A nicht sehr weit entfernten Orte B eine Mittagslinie ziehen. Man darf nur daselbst eine Linie B i ziehen, welche mit der Richtung der Magnetnadel B β einen Winkel β B i auf dieselbe Art, und von derselben Größe macht, als welchen die Richtung der Magnetnadel A α, mit des Orts A Mittagslinie A g machte, so wird B i des Orts B Mittagslinie seyn.

6. Weil nun, sobald A, B, nicht weit von einander weg liegen, die Mittagslinien A g, B i ohne merklichen Fehler mit einander parallel sind (3), so werden auch wegen der gleichen Winkel α A g, β B i, die Richtungen der Magnetnadeln A α, B β mit einander gleichlaufend seyn.

Dieser Satz, durch Hülfe der Magnetnadeln, parallele Linien auf dem Felde zu erhalten, wird uns in der Folge in der practischen Geometrie verschiedene sehr wichtige Vortheile verschaffen, von denen der (5), Mittagslinien zu ziehen, bey weitem der geringste ist, weil sich diese Aufgabe auf verschiedene andere Arten

sich:

icherer, als durch Hülfe der Magnetnadeln, ufldsen läßt, auch die Ziehung der Mittags: inien überhaupt so oft nicht vorkömmt.

7. Da nun in der Feldmeßkunst sehr häufig ie Frage vorkömmt, was eine gewisse Linie, . B. GH Fig. LXXIII mit den parallelen Richtungen der Magnetnadeln für einen Winkel nacht, so dient dazu folgendes Werkzeug.

Die Boussole.

§. 119. Hier wird nur ein allgemeiner Begriff von diesem Werkzeuge genügen. Wer essen Einrichtung umständlicher kennen lernen will, dem können folgende Schriftsteller Unter: icht ertheilen. Leupolds Theatrum Geom. §. 437. Vollimhaus Anwei: ung zum Landmessen mit Stäben nd der Kette, nebst dem Gebrauche er Boussole. Hannover und Lemgo 1776. ollmanns Geodäsie u. s. w. Gründ: icher Unterricht von dem Gebrauche er Boussole in der practisch. Geo: tetrie, von M. Joh. Gottlob Riedel. eipz. 1795. 8. 12 Kupfert. Die Hauptsache estehet darinn:

I. Man schließt die Magnetnadel ik Fig. XXIV. in ein rundes cylindrisches Gehäuse on Messing lpq ein, welches oben m

Glasdeckel versehen ist, um die Nadel vor dem Winde zu sichern. Das Gehäuse lpq wird auf eine viereckigte Platte fmno, welche mit der diptrischen Regel PQ aus einem Stücke bestehen kann, befestigt. Senkrecht auf die Platte fmno, erhebt sich in dem Mittelpunkte des Gehäuses ein konischer Stift c, auf dem die Magnetnadel in horizontaler Lage frey spielen, und sich aller Orten hinwenden kann. Damit die Magnetnadel nicht von dem Stifte herabfalle, so ist sie bey c mit einem sogenannten Hütchen versehen, welches auf dem Stifte zu ruhen kömmt. An der innern Seitenwand des Gehäuses wird in einiger Entfernung von dem Boden, parallel mit der Ebene fmno, ein Ring befestigt, der in seine 360° getheilet ist, und mit der Magnetnadel ik in einer Ebene liegt. Indem nun die Magnetnadel ik sich um c, als um eine Axe, horizontal herumwendet, so weiset die Spitze i, die Abtheilungen auf dem Ringe. Da bekanntermaaßen die eine Spitze der Magnetnadel sich beständig ohngefähr gegen Norden, folglich die andere gegen Süden hinrichtet, so kann man, um beyde bequem von einander zu unterscheiden, den südlichen Theil der Nadel, welcher hier z. E. k seyn mag, stumpf lassen, den nördlichen Theil i aber, der auf dem Ringe die Abtheilungen weiset, mit einer sehr scharfen Spitze versehen.

Ende

Endlich muß die Visirlinie vt des Diopter-linials PQ, mit dem Durchmesser des einge-theilten Ringes, welcher durch 0° und 180° gehet, parallel seyn, damit, wenn die Spitze der Nadel auf 0° steht, die Visirlinie tv mit der Richtung der Magnetnadel gleichlaufend sey.

Dieß ist im Ganzen die gewöhnliche Ein-richtung der Boussole. Einzelne Vorrichtun-gen, z. E. vermittelst eines Schiebers die Magnetnadel von dem Stifte abzuheben, da-mit dieser, und das Hütchen der Nadel, beym Hin- und Hertragen der Boussole nicht be-schädigt werde, das Stativ zu diesem Werk-zeuge u. d. gl. kann man mit mehrerem bey den erwähnten Schriftstellern ersehen.

Vernier an der Boussole.

II. Da bey der eben beschriebenen gewöhn-lichen Boussole, Theile von Graden nur nach dem Augenmaaße geschätzt werden können, so haben einige dieß Werkzeug durch Anbringung eines Vernier zu verbessern gesucht. Da aber dieser V. auf der Magnetnadel selbst nicht wohl angebracht werden kann, so läßt man die ganze bisherige Vorrichtung, nämlich die Diop-terregel PQ mit der daran befindlichen Bous-sole kmno, sich besonders um das Centrum eines eingetheilten Randes drehen, und bringt nun den Vernier an die Diopterregel PQ an.

Der in dem Magnetkästchen lqp befindliche eingetheilte Ring bleibt nunmehr weg, und nur auf dem Boden des Kästchens ist eine Linie parallel mit der Visirlinie vt, eingerissen, über welcher die Nadel einspielen muß. Alles zusammen läßt sich um den Zapfen einer Nuß drehen, und man kann, wenn es nöthig ist, auch Vorrichtungen zu sanften Bewegungen anbringen. Das ganze Werkzeug muß sich so stellen lassen, daß wenn der Index des Vernier auf 0° stehet, die Magnetnadel über der Linie auf dem Boden des Kästchens einspiele.

Ob diese Anbringung eines Vernier an der Boussole, große Vortheile verschaffe, möge wohl zu bezweifeln seyn, wenn man bedenkt, daß die Beobachtung, wenn jedesmahl die Nadel in Ruhe gekommen, selbst nicht ganz sicher ist.

Einige Erinnerungen über die Beschaffenheit der Nadeln.

§. 120. 1. Man giebt den Nadeln wenigstens eine Länge von 5 Zollen. Kleinere Nadeln geben nicht viel Richtigkeit, und schwanken auch zu sehr, ehe sie in Ruhe kommen. Größere müssen mit sehr viel Genauigkeit gearbeitet seyn, wenn sie auf dem Stifte, worauf sie sich drehen, eine hinlänglich freye Bewegung erhalten sollen.

2. Man verfertigt die Nadeln von dem besten und reinsten Stahle, und läßt sie gewöhnlich blau anlaufen; dies wollen aber einige nicht billigen, weil die Nadeln in diesem Zustande zwar den Magnetismus leicht annehmen, aber auch bald wieder verliehren sollen.

Die magnetische Kraft den Nadeln zu ertheilen, ist übrigens allen Mechanicis bekannt, und es würde überflüssig seyn, hier davon zu reden. Man s. indessen hierüber Karstens Kenntniß der Natur im XXIten Abschn. Gehlers physik. Wörterbuch, unter dem Artik. Magnet, und andere physikalische Schriften.

3. Man hat auch Magnetnadeln, die durchaus von gleicher Breite sind, und die Gestalt eines dünnen Parallelepipedi haben, dessen breitere Seitenflächen, beym Ruhen der Nadel auf ihrem Stifte, vertical zu liegen kommen, an den Enden aber scharf zulaufen, um auf dem eingetheilten Rande die Grade zu weisen, und die wahre Richtung der Nadel anzugeben.

Statt dessen kann auch eine längs der Nadel eingerissene feine Linie, deren Richtung durch den Umdrehungspunkt der Nadel gehen muß, als Zeiger dienen.

Solche durchaus gleich breite Nadeln sollen, vermöge der Erfahrung, die magnetische

pfindlichkeit. Kann man aber die Boussole wohl um einige Grade drehen, ohne daß dies die Nadel empfände, so ist sie träge und unbrauchbar.

5. Gewöhnlich, wenn solchergestalt eine Nadel träge befunden wird, liegt der Fehler in dem Stifte, auf dem sie ruhet: wenn solcher etwa stumpf geworden, oder sich Unreinigkeiten in dem Hütchen gesammlet haben. Unterweilen liegt aber die Trägheit einer Nadel auch darinnen, wenn ihr die magnetische Kraft nicht gehörig mitgetheilt worden.

6. Man nennt Fig. LXXIII. den Winkel αAg, den die Magnetnadel Aα mit der Mittagslinie macht, die Abweichung der Magnetnadel, diese wäre also für Göttingen und alle umliegende Oerter 20 Grad.

Gesetzt nun, man habe die Boussole Fig. LXXIV. in eine solche Lage gebracht, daß das nördliche Ende i der Magnetnadel ik, wenn sie zur Ruhe gekommen, 0° Grad wiese, so würde in dieser Lage die Richtung der Magnetnadel ik mit vt, folglich auch mit der Schärfe rs des Diopterlinials parallel seyn: (Vorausgesetzt, daß rs mit vt parallel ist, welches gewöhnlich angenommen wird). Zöge man alsdann längs sr eine gerade Linie, so würde diese die Richtung der Magnetnadel seyn.

D:

Da nun jetzt für Göttingen die Abweichung der Magnetnadel 20° ist, und das nördliche Ende i der Magnetnadel auf der westlichen Seite der Göttingischen Mittagslinie liegt, so setze man an sr eine Linie ab, die mit sr nach Osten zu einen Winkel rab = 20° macht (Hier ist ab aus einem Versehen westwärts ar gezeichnet worden), so wird ab die Mittagslinie von Göttingen seyn. So erhellt also, wie man auf einer ebenen Horizontalfläche an einem gewissen Orte vermittelst der Boussole, eine Mittagslinie ziehen könne, vorausgesetzt, daß man an dem Orte, oder für einen ihm benachbarten Ort, die Abweichung der Magnetnadel weiß, und ob diese östlich oder westlich ist.

Will man längs rs sogleich selbst die Mittagslinie ziehen, so dreht man die ganze Boussole PnfmoQ, bis das nördliche Ende i der Nadel auf dem eingetheilten Ringe westwärts von 0°, um 20 Grad absteher, und ziehet alsdann längs sr die verlangte Mittagslinie.

7. Bey dieser Aufgabe, und überhaupt wo man Magnetnadeln braucht, darf kein Eisen oder Stahl in der Nähe seyn, wodurch die wahre Richtung derselben verändert werden könnte, eine Vorsicht, die desto nöthiger ist, je

empfindlicher die Magnetnadeln sind. Aus dieser Ursache müssen an allen Werkzeugen, wo man Magnetnadeln anzubringen pflegt, Schrauben, und andere Vorrichtungen, nicht aus Eisen oder Stahl, sondern aus andern Materien verfertigt werden.

8. Noch ein anderer übler Umstand bey dem Gebrauche der Magnetnadeln, insbesondere in bergigten Gegenden, ist, die von dem Hrn. von Humboldt und andern bemerkte magnetische Eigenschaft des Serpentins, des Granits, und vielleicht mehrerer Bergarten, wodurch offenbar die Richtung der Magnetnadel gestört, und daher der Gebrauch derselben beym Feldmessen unsicher gemacht wird. M. s. von Humboldt Ueber die merkwürdige magnetische Polarität einer Bergskuppe von Serpentinstein in Grens neuem Journ. d. Physik IV. B. S. 136. Ferner Chr. Fr. Schröders erste Fortsetzung seiner Abhandlung vom Brockengebürge, Hildesheim 1790., und Hr. Obristl. von Zach in Bode Samml. astron. Abh. 1793. (S. 244. I. B.)

9. Der Erfahrung gemäß, hat die Abweichung der Magnetnadel ihre periodischen Veränderungen, oder die Richtung der Magnetnadel macht mit der Mittagslinie eines gewissen Orts, nicht beständig einen und denselben

Win:

Winkel. So hat z. B. in Paris vom Jahre 1699 bis 1716, also in 17 Jahren die Abweichung derselben um 4° 10′ zugenommen. Wenn man diese 4° 10′ mit 17 dividiret, so kommen für Paris auf die jährliche mittlere Veränderung 14′. Um so viel hätte jährlich die Abweichung der Magnetnadel zunehmen müssen, wenn ihre Aenderung gleichförmig gewesen wäre. Allein selbst diese jährliche Aenderung ist nicht für alle Zeiten beständig, und für alle Orte einerley. (Verglichen oben §. 118. 4. die Angabe für Göttingen.) Ja, unterweilen hat sich selbst innerhalb einiger Tage die Abweichung der Magnetnadel merklich verändert.

Diese Anomalien in der Richtung der Magnetnadel sind, so wie überhaupt das Gesetz ihrer Abweichung an verschiedenen Orten der Erde, noch lange nicht erforscht. Ueber die Ursache dieser veränderlichen Abweichung der Magnetnadel habe ich in meinem Lehrbuche der Naturlehre, 3te Auflage. §. 511. S. 524 eine Muthmaaßung gegeben.

Indessen folgt hieraus ein wichtiger Satz für den Feldmesser, nämlich

Daß man nur bey Messungen, die eine kurze Zeit dauern und wobey überdem auch keine Bedenklichkenien wie (8) statt finden, sich mit einiger Zuverlässigkeit auf den Gebrauch der Magnetnadeln verlassen dürfe.

Ich

Ich kann daher diejenige Messungsart nicht billigen, bey der man den Meßtisch nur allein nach der Magnetnadel richtet. Man müßte denn versichert seyn, daß sie während einer Messung ihre Richtung nicht merklich geändert habe. Allein, wie ist dies bey der topographischen Aufnahme eines ganzen Landes, die oft viele Jahre dauert, zu erwarten. Ich will gar nicht erwähnen, daß es noch andere Ursachen giebt, warum ich nie zu einer Arbeit, die ins Große geht, eine solche Messungsart empfehlen mögte, wenn sie gleich von einigen sehr angepriesen worden ist.

10. Man hat mit der Boussole noch andere Einrichtungen, z. B. zum Höhenmessen, zum Nivelliren u. d. gl. verbunden. Hieher gehört die Boussole, welche Herr Professor Stegmann in Marburg im 4ten Bande der Beschäftigungen der Berlin. Gesellschaft naturforschender Freunde, beschrieben hat. Boussolen zu Ziehung der Mittagslinien haben besonders Brander und Höschel sehr gut eingerichtet. (Br. Beschreibung des magnetischen Declinatorii und Inclinatorii. Augsburg, 1779. 8.)

Gebrauch der Magnetnadeln auf dem Meßtische.

§. 121. Um auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel, mithin auch, wenn er

ver

verlangt wird, eine Mittagslinie angeben zu können, so pflegt man auf den Diopterlinialen Fig. LXVIII. LXIX, ein länglichtviereckigtes Kästgen h g anzubringen, worinnen sich eine Magnetnadel auf ihrem Stifte herumdreht. Das Kästgen wird mit einem Glasdeckel versehen, damit die Nadel keinen Schaden leide. Auf dem Boden des Kästgens ist, parallel mit der Schärfe i k des Diopterlinials, eine gerade Linie gezogen, damit, wenn die Magnetnadel über dieser Linie einspielt, längs i k auf dem Meßtische eine gerade Linie gezogen werden könne, die mit der Richtung der Magnetnadel gleichlaufend ist.

Der weitere Gebrauch hievon wird sich in der Folge zeigen.

Kurze Theorie geometrischer Werkzeuge mit Spiegeln.

§. 122. Alle bisher beschriebenen Werkzeuge, Winkel zu messen, erfordern Stative, worauf man sie setzt, und ihnen die gehörigen Bewegungen giebt: Nun können aber in der Feldmeßkunst oft Fälle vorkommen, wo man kein Stativ gebrauchen kann, z. B. wegen Mangel und Unbequemlichkeit des Platzes, wenn man sich auf einem Thurme befände, wo man mit einem Stative nicht nahe genug ans Fenster kommen könnte, oder das Fenster

darf daher der Spiegel il nicht senkrecht auf der Axe kp des Fernrohrs stehen, sondern muß mit ihr einen gewissen Winkel kpi machen, den ich nachher bestimmen werde.

Ferner muß der Spiegel il nicht so breit seyn, daß er alle Strahlen aufhält, die von einem gewissen Gegenstande auf das Objectivglas wr des Fernrohrs fallen würden, sondern es muß so viel Raum übrig bleiben, daß neben dem Spiegel vorbey, auch noch Strahlen auf das Objectivglas fallen können.

Man kann daher dem Spiegel eine solche Breite il geben, daß er etwa $\frac{2}{3}$ von denen Strahlen, die auf das Objectivglas wr fallen würden, aufhält, die übrigen aber neben sich vorbeygehen, und auf das Objectivglas fallen läßt, damit man auch durch das Fernrohr die Objecte noch sehen könne.

VII) Ferner ist auch, senkrecht auf die Alhidadenregel P, ein zweyter Spiegel ed angebracht, dessen Richtung ed durch den Mittelpunkt c des Werkzeugs geht, seine polirte Fläche dem Spiegel il zukehrt, und eine solche Stellung haben muß, daß, wenn die beyden Regeln ML und P, einen rechten Winkel mit einander machen, ed und il ohngefähr parallel sind.

VIII)

VIII) Die Spiegel selbst können blos von Glas seyn, noch besser ist es aber, wenn sie von Metall sind, wegen der doppelten Bilder, die gläserne Spiegel verursachen.

IX) Endlich ist im Brennpunkte des Fernrohrs ein eben geschliffenes Glas angebracht, worauf zwey, sich in der Axe des Fernrohrs senkrecht durchschneidende Linien, eingerissen sind, von denen die eine auf der Ebene der Regel LM senkrecht stehen muß, wie §. 104.

Dies ist im Ganzen die Beschreibung der wesentlichsten Stücke eines solchen Werkzeugs mit Spiegeln, die übrigen einzeln Vorrichtungen mögen dem Mechanico überlassen bleiben. Ich will jetzt kürzlich den Gebrauch und die Vortheile des bisher beschriebenen Werkzeugs zeigen. Vorher überlege man aber folgendes:

Bilder im Brennpunkte des Objectivs.

§. 123. 1. Es sey Fig. LXXVI. wr das Objectivglas des Fernrohrs und mk dessen Axe. l der sich vor dem Objectiv befindende, und d der auf der Alhidadenregel P (§. 122. VI. VII.) befestigte Spiegel.

2. Das Fernrohr km sey nach einem sehr entlegenen Punkte, z. E. nach der Spitze eines

seh

sehr entfernten Thurms gerichtet, so kann man die Strahlen Qc, Q'v, die von demselben auf die Vorderfläche des Spiegels ed, und des Objectivglases wr fallen, ohne merklichen Fehler als parallel ansehen.

3. Die Strahlen Qv die solchergestalt be dem Spiegel il vorbey, mit der Axe des Fernrohrs mk parallel, auf das Objectiv w fallen, werden daselbst nach der Richtung v gebrochen, und vereinigen sich in der Axe i einem Punkte μ, welcher das Bild des entlegenen Punktes (2) seyn wird. Dieses Bild μ werde ich das dioptrische Bild des entlegenen Gegenstandes nennen.

4. Die mit mk parallelen Strahlen, Qc, die aber bey c unter dem Winkel Qcd auf den Spiegel ed fallen, werden nach den bekannten Gesetzen der Katoptrik, unter eben dem Winkel ecp, nach der Richtung cp auf den Spiegel il zurückgesandt, und fallen unter dem Winkel cpl auf den Spiegel il, von d werden sie durch eine abermahlige Reflexi unter dem Winkel qpi=cpl, nach der Richtung pq auf das Objectivglas wr geworfen. Diese mit pq parallelen Strahlen werden hi auf von dem Objectivglase gebrochen, und einen Punkt π hinter dem Glase vereini rgestalt, daß bey π abermahls des entlege Gegenstandes Bild entstehen wird. U
D

den Ort dieses Bildes, oder den Vereinigungspunkt π' zu finden, so ziehe man durchs Mittel des Objectivglases m, mit den einfallenden Strahlen wie p q, eine Linie $m\pi$ parallel, und mache $m\pi = m\mu'$ (3), so wird π der Vereinigungspunkt der mit p q parallelen Strahlen seyn *). Dieses Bild π entsteht also von Strahlen, die erst von den Spiegeln reflektirt, und dann von dem Glase w r gebrochen werden, daher nenne ich π das katoptrisch-dioptrische Bild des Gegenstandes Q.

5. Das Auge bey k, würde also hier durchs Ocularglas, in dem Fernrohre zwey Bilder μ, π sehen; das erstere μ, welches von Strahlen Q v, herrührt, die gerade zu aufs Objectiv fallen, das zweyte π, welches von den reflectirten Strahlen entsteht.

6. Ich suche nun den Winkel $\pi m \mu$, den die beyden Bilder π, μ, am Mittelpunkte m des Objectivglases mit einander machen.

7. Aufl. Man ziehe durch c mit dem Spiegel i l die parallele Linie c g, so ist der Winkel e c g = dem Winkel, unter welchem sich die verlängerten Richtungen e d, i l, der beyden Spiegel durchschneiden würden. Man setze den Winkel e c g = y, den Winkel Q c d oder

*) S. Kästners Dioptrik. 35. 36. 37.

sehr entfernten Thurms gerichtet, so kann man die Strahlen Qc, Qv, die von demselben auf die Vorderfläche des Spiegels ed, und des Objectivglases wr fallen, ohne merklichen Fehler als parallel ansehen.

3. Die Strahlen Qv die solchergestalt bey dem Spiegel il vorbey, mit der Axe des Fernrohrs mk parallel, auf das Objectiv wr fallen, werden daselbst nach der Richtung $v\mu$ gebrochen, und vereinigen sich in der Axe in einem Punkte μ, welcher das Bild des entlegenen Punktes (2) seyn wird. Dieses Bild μ werde ich das dioptrische Bild des entlegenen Gegenstandes nennen.

4. Die mit mk parallelen Strahlen, Qc, die aber bey c unter dem Winkel Qcd auf den Spiegel ed fallen, werden nach den bekannten Gesetzen der Katoptrik, unter eben dem Winkel ecp, nach der Richtung cp auf den Spiegel il zurückgesandt, und fallen unter dem Winkel cpl auf den Spiegel il, von da werden sie durch eine abermahlige Reflexion unter dem Winkel qpi=cpl, nach der Richtung pq auf das Objectivglas wr geworfen. Diese mit pq parallelen Strahlen werden hierauf von dem Objectivglase gebrochen, und in einen Punkt π hinter dem Glase vereinigt, dergestalt, daß bey π abermahls des entlegenen Gegenstandes Bild entstehen wird. Um

den

14. Dieser Werth in (11) statt α gesetzt, giebt $\pi m \mu = 2 . y = 2 . ecg$ das will sagen, der Winkel $\pi m \mu$ ist zweymahl so groß, als derjenige, unter welchem sich die verlängerten Richtungen der beyden Spiegel il und ed durchschneiden würden, weil gc mit il parallel ist.

15. Wenn $\pi m \mu = o$ seyn soll, das heißt wenn die beyden Bilder π, μ, in dem Fernrohre zusammenfallen, oder sich decken sollen, so muß auch $y = o$ seyn; die Richtungen ed, il, werden also in diesem Falle mit einander parallel seyn, weil der Winkel y, unter dem sie sich schneiden (7) = o ist.

16. Dies giebt also ein leichtes Mittel, die beyden Spiegel ed, il in eine parallele Lage zu bringen.

Man richte die Axe des Fernrohrs nach einem sehr weit entlegenen Gegenstande, bis das dioptrische Bild des Gegenstandes in dem Durchschnittspunkte der beyden Linien erscheinet, die auf dem Planglase eingerissen sind, welches in dem Brennpunkte des Objectivglases befindlich ist §. 122. IX. Hierauf wende man die Alhidadenregel P so lange herum, bis erst beyläufig auch das katoptrischdioptrische Bild des Gegenstandes in dem Fernrohre erscheint, befestige hierauf den Alhidadenhalt-

§.

§. 122. III. an den Rand, und drehe bloß di
Micrometerschraube herum, so wird man da
durch dem Spiegel ed eine sanfte Bewegun
geben, und das katoptrischdioptrische Bild völ
lig genau an das dioptrische bringen können.
In dem Augenblicke, da sich diese beyden Bil
der im Fernrohre decken, höre man auf zu
schrauben, und die beyden Spiegel ed, il
werden parallel seyn (15).

17. Da nach §. 122. VII. von dem Me
chanico die Einrichtung so gemacht seyn muß,
daß, wenn man die beyden Regeln LM und
P, ohngefähr in einen rechten Winkel bringt,
auch die Spiegel ed, il, beynahe eine paral
lele Lage erhalten, so kann man gleich anfangs,
ehe man die Operation (16) vornimmt, die
beyden Regeln LM und P in einen rechten
Winkel stellen, so wird man alsdann, die Al
hidadenregel P wenigstens nicht sehr viel ver
rücken dürfen, um das katoptrischdioptrische
Bild ins Fernrohr zu bringen.

18. Man kann auch, um die Spiegel ed,
il parallel zu stellen, die Alhidadenregel P an
den Rand befestigen, und dann die Regel LM
herumwenden, bis die beyden Bilder in dem
Fernrohre zusammenfallen.

19. Anmerk. Das Auge bey k siehe
eigentlich das katoptrischdioptrische Bild π Fig.
LXXVI.

LXXVI. nicht eher, als bis π innerhalb der Röhre des Fernrohrs fällt. Denn obgleich das Bild π, wegen der Reflexion der Spiegel allemahl entstehet, so kann doch der Winkel $\pi m \mu$ so groß seyn, daß π ausserhalb der Röhre des Fernrohrs fällt, und also dem Auge k vor dem Ocularglase unsichtbar ist. Also siehet man eigentlich in dem Fernrohre beyde Bilder zugleich nicht eher, als bis man die beyden Spiegel il, ed, in eine Lage gebracht hat, die der parallelen nahe kömmt; denn alsdann wird in der Formel (14) der Winkel y, folglich auch $\pi m \mu$ klein, so daß π innerhalb der Röhre des Fernrohrs fallen kann.

Diese Erläuterung hielte ich noch für nöthig, hier beyzubringen.

20. Es wird gut seyn, vermittelst eines sehr weit entlegenen Objects, ein für allemahl genau die Stellen auf dem eingetheilten Rande BA Fig. LXXV. zu bestimmen, an die man nur in jedem Falle die Alhidadenregel und die Regel LM des Fernrohrs bringen darf, um sogleich die parallele Lage der Spiegel zu erhalten.

Diese Stellen zu bestimmen, kann man so verfahren.

21. Man bringe den ausgespannten Faden fn der Alhidadenregel P, genau über den Punkt

o, wo sich auf dem Rande BA die Abtheilungen anfangen, befestige die Alhidadenregel in dieser Lage, und bringe dann die Regel des Fernrohrs LM mit P ohngefähr in einen rechten Winkel, so sind beynahe die beyden Spiegel parallel (17).

Um aber die völlig genaue parallele Lage zu erhalten, so richte man das Werkzeug, wie hier die Figur ausweiset, nach einem sehr entlegenen Objecte Q, wende und drehe hierauf sowohl das ganze Werkzeug, als auch die Regel LM, so lange bis in dem Fernrohre beyde Bilder des Objects Q erscheinen, und sich in der Axe des Fernrohres, oder in dem Durchschnitte der beyden Kreuzlinien (§. 122. IX.) decken. Sobald dieses geschiehet, befestige man die Regel des Fernrohrs LM, und beyde Spiegel ed, il, werden genau mit einander parallel seyn (15, 16.)

22. Hierauf reisse man bey v längs der Schärfe der Regel LM genau eine zarte Linie in den eingetheilten Rand, so hat man auf dem Rande ein für allemal die beyden Stellen o (21) und v, an die man nur jedesmal den Faden fn der Alhidadenregel, und die Schärfe LM der Regel des Fernrohrs bringen darf, um sogleich die parallele Lage der beyden Spiegel ed, il, zu bekommen.

Wie

Wie man vermittelst des Werkzeugs Fig. LXXV. einen Winkel messen könne?

§. 124. 1. Gesetzt, Q, R seyen auf dem Felde ein paar sehr weit entlegene Objecte, deren Winkel QcR am Mittelpunkte des Werkzeugs man finden wollte.

2. Um dieses zu leisten, bringe man vorher beyde Spiegel ed, il, in eine parallele Lage; nämlich den Faden fn der Alhidadenregel bringe man genau über den Punkt o der Eintheilung, die Regel LM aber an den Punkt v, so ist ed mit il parallel (§. 123. 22).

3. Hierauf fasse man bey g das ganze Werkzeug mit der linken Hand, und wende es so lange, bis das Fernrohr genau nach dem Objecte Q hingerichtet ist, also Q in der Axe des Fernrohrs erscheint.

4. Dieses Bild von Q, welches das Auge im Fernrohre sieht, ist eigentlich ein doppeltes Bild; weil die beyden Spiegel ed, il, parallel sind, und bey dieser Lage der Spiegel, eines entlegenen Objects dioptrisches und katoptrischdioptrisches Bild in der Axe des Fernrohrs sich decken, oder zusammenfallen, und folglich im Grunde nur ein Bild ausmachen. (§. 123. 15).

5. Man löse nun die Alhidadenregel P. So bald man diese anfängt herumzudrehen, so wird

wird das katoptrischdioptrische Bild des Objects Q, das Dioptrische im Fernrohre verlassen, weil die Spiegel aus ihrer parallelen Lage kommen, und man wird bey fernerer Herumwendung der Alhidadenregel, blos das dioptrische Bild von Q, im Fernrohre behalten.

6. Man halte also bey g das Werkzeug so viel, als möglich, unverrückt, damit man des Objects Q dioptrisches Bild nicht aus dem Fernrohre verliehre, und wende die Alhidadenregel P so lange herum, bis man das katoptrischdioptrische Bild des Gegenstandes R ins Fernrohr bekömmt: Dieses wird geschehen, wenn der Spiegel ed eine solche Lage erhält, daß die Strahlen Rc, die von R auf den Spiegel ed fallen, von ihm zurück, auf den Spiegel il, und von da ferner ins Fernrohr geworfen werden können.

7. So hat man alsdann zwey Bilder im Fernrohre, das dioptrische von dem Gegenstande Q, nach welchem das Fernrohr gerichtet ist, und das katoptrischdioptrische von R.

8. Sobald man nun dies Bild von R nur erst beyläufig im Fernrohre hat, so befestige man die Alhidadenregel P an den Rand, und drehe blos die Micrometerschraube herum, so wird diese dem Spiegel ed eine sanfte Bewegung ertheilen, und man wird machen können,

daß

aß beyde Bilder von Q und R (7), sich ge-
au in der Axe des Fernrohrs decken. In dem
Augenblicke, da dies geschieht, höre man auf
zu schrauben.

9. Dann untersuche man, um wie viel
Theile des Randes sich der Inder fn der Al-
idadenregel, von seiner erstern Stelle (2), wo
r nämlich über o stand, fortbewegt hat. Ge-
etzt, der Index fn habe auf dem Rande, den
Bogen ok z. E. 20 Theile des Randes
§. 122. II.) durchlaufen, so wird der Win-
el QcR der beyden Objecte = 20° seyn.
Stände fn zwischen zwey Theilpunkten des Ran-
des, z. E. zwischen den 20ten und 21ten, so
muß man dessen Abstand von dem 20ten, ver-
mittelst der Micrometerschraube finden §. 101.

10. Auf solche Art wird also mit dem bis-
her beschriebenen Werkzeuge auf dem Felde ein
Winkel gemessen; der Beweiß des gewiesenen
Verfahrens ist aber folgender.

11. Bew: I) Nachdem man, vermittelst
des Verfahrens (2), beyde Spiegel ed, il
Fig. LXXVII. in eine parallele Lage gebracht
hat; so würden sowohl das dioptrische als ka-
optrischdioptrische Bild des Objects Q, bey μ
in der Axe des Fernrohrs zusammentreffen, und
die Axe mμ des Fernrohrs würde mit Qc
parallel seyn, weil ich den Gegenstand Q sehr
weit entfernt annehme. Daß aber bey μ nicht

zugleich des Objects R Bild seyn könne, erhellet daraus, weil wegen der ungleichen Winkel Rcd, ecp, der auf den Spiegel ed fallende Strahl Rc, nicht nach der Richtung cp, und folglich auch nicht nach der Richtung pmμ ins Fernrohr reflectiret werden kann. Denn cp ist der reflectirte Strahl von Qc, daher der Winkel Qcd = ecp; aber Rcd < Qcd also auch Rcd < ecp. d. h. cp kann nicht der reflectirte Strahl von Rc seyn.

II) Da also bey der jetzigen parallelen Lage der beyden Spiegel, der einfallende Strahl Rc nicht nach cp, und folglich nach pμ reflectirt werden kann, so muß man offenbar die Lage des Spiegels ed verändern, wenn der Gegenstand R, nach den Richtungen Rcpμ ins Fernrohr reflectirt werden soll.

III) Man halbire den Winkel pcR vermittelst der Linie cν, und setze auf cν eine Perpendicularlinie $\varepsilon\delta$, so wird $\varepsilon\delta$ die Lage des Spiegels ed seyn müssen, wenn der einfallende Strahl Rc nach der Richtung cp, und folglich nach pμ ins Fernrohr kommen soll. Denn wegen pcν = νcR ist auch Rcδ = εcp, oder Einfallswinkel und Reflexionswinkel gleich, folglich, wenn jetzt Rc auf den Spiegel $\varepsilon\delta$ fällt, wird Rc nach der Richtung cp zurückgeworfen, und von da längs pμ ins Fernrohr gewandt, wo denn bey μ, in der Axe desselben,

den, des Objects R katoptrischdioptrisches Bild entsteht.

IV) Das Auge bey k wird alsdann in dem Fernrohre, bey μ, der beyden Objecte Q, R, Bilder sich decken sehen; denn bey μ ist auch das dioptrische Bild des Objects Q, weil die Axe des Fernrohrs nach Q hingerichtet ist.

V) Ich suche nun den Winkel dcδ oder ece, um welchen man den Spiegel ed aus seiner mit il parallelen Lage hat herausbringen müssen, um des Gegenstandes R katoptrischdioptrisches Bild in die nach dem Objecte Q hingerichtete Axe des Fernrohrs zu bringen.

VI) Diesen Winkel dcδ finde ich so:

Es ist

Qcd = pce (I)

oder QcR + Rcd = pce + ece.

VII) Auch ist Rcδ = pce (III), oder
Rcd + dcδ = pce.

VIII) Diesen Werth von pce substituire man in die Gleichung (VI), so wird

IX) QcR = dcδ + ece aber dcδ = ece,
also QcR = 2 . ece oder
ece = ½ QcR,

das will sagen, der Winkel, um den man die Lage des Spiegels ed hat verändern müssen, beträgt genau die Hälfte des Winkels — —

den die Objecte Q, R, am Punkte c, welcher in Fig. LXXV. zugleich des Werkzeugs Mittelpunkt ist, mit einander machen.

X) Nun befindet sich der Spiegel e d auf der Alhidadenregel P (Fig. LXXV.); folglich verändert sich die Stellung des Spiegels e d, um eben den Winkel, um den man die Alhidadenregel herum drehet. Es ist also der Bogen oh auf dem Rande (§. 124. 8) das Maaß des Winkels och, um den die Alhidadenregel gedrehet, und des Spiegels e d Lage verändert worden ist. Folglich ist des Bogens oh Größe auch das Maaß des halben Winkels QcR, dessen Größe man finden wollte (IX).

XI) Wäre nun auf dem Werkzeuge Fig. LXXV. der Quadrant oa wie gewöhnlich in seine 90° getheilt, so würde man allemal den Bogen oh doppelt nehmen müssen, um des auszumessenden Winkels QcR Maaß zu bekommen. Um sich diese Arbeit zu ersparen, theilet man den Quadranten nicht in 90 sondern in 180 gleiche Theile, wo alsdann jeder Theil eigentlich einen halben Grad bedeutet. Der auszumessende Winkel QcR hält alsdann so viele würkliche Grade, so viel halbe Grade, oder Theile auf den Bogen oh gehen.

Und so zeigt also das bisherige den Grund, warum man den Quadranten in 180 Theile

theilt §. 122. II. Den Halbmesser des Quadranten kann man etwa 8 Zoll lang nehmen, und dann fallen die Theile auf dem Rande doch noch ziemlich groß aus.

Wegen der Micrometerschraube ist aber noch folgendes zu erinnern.

Wenn ihre Schraubengänge so beschaffen wären, daß z. E. 6 Revolutionen den Faden f n an der Alhidadenregel um einen Theil des Randes, also eigentlich um einen halben Grad fortschöben, so kämen auf eine Revolution 5′ und auf $\frac{1}{10}$ Revolut. $\frac{1}{2}$ Minute. Wenn nun z. E. der Faden f n zwischen dem 20ten und 21ten Theil des Randes stünde, so wende man die Micrometerschraube herum, bis der Faden auf den 20ten Theilpunkt fortgerückt ist, und zähle ihre Umwendungen.

Gesetzt, man habe sie $3\frac{1}{10}$ mahl herumwenden müssen, so würde der wahre Abstand des Fadens von dem 20ten Theilpunkte $= 3\frac{1}{10} \times 5'$ also $15\frac{1}{2}'$ gewesen seyn; bey Ausmessung des Winkels Q c R muß man aber allemal das doppelte hievon nehmen, weil, wenn sich der Faden f n auf dem Rande um einen gewissen Winkel verschiebt, sich der Winkel Q c R um doppelt so viel verändert. Wenn man also bey dem Verfahren (9) den Abstand des Fadens f n von dem 20 Theilstriche des

Radius = $3\frac{1}{16}$ Revolut. gefunden hätte, so wäre der auszumessende Winkel QcR nicht 20° + $15\frac{3}{4}'$, sondern 20° 31'.

Bestimmung des Winkels ipf Fig. LXXV. den die Axe des Fernrohrs kfp mit dem Spiegel il machen muß, damit ein Strahl, der nach der Richtung kfp auf il fiele, von dem Spiegel il. nach dem Mittelpunkte c reflectirt würde.

§. 122. VI.

§. 125. Es muß also der Winkel ipf = lpc seyn, nach den Gesetzen der Katoptrik.

Nun ipf + lpc + fpc oder
2 ipf + fpc = 180° daher

$$ipf = \frac{180° - fpc}{2} = 90° - \tfrac{1}{2} fpc.$$

Nun fälle man von c auf die Axe des Fernrohrs das Perpendikel cf, so kann man in dem rechtwinklichten Dreyecke cpf aus den gegebenen cp, cf, den Winkel fpc berechnen, und es ist für den Sinus totus = 1

$$\sin fpc = \frac{cf}{cp}$$

cf und cp sind aber Größen die man messen kann; hat man solchergestalt den Winkel fpc so hat man auch den Winkel ipf = 90° — ½ fpc.

Immer

Anmerkungen über das bisherige.

§. 126. I) Da das wesentliche bey Ausessung eines Winkels mit diesem Werkzeuge ır darauf ankömmt, das katoptrischdioptrische ild des einen Objects R, mit dem dioptrischen s anderen Q, genau in die Axe des Fernrohrs bringen (§. 124. 8). und dieses geschehen nni, wenn man blos das Werkzeug bey g it der linken Hand hält, mit der rechten aber e Alhidadenregel P herumführt, so erhellet, ıß ein Stativ bey einem solchen Werkzeuge it Spiegeln entbehrt werden kann. Und dies s ist Ursache, warum man auch solche Werkzeuge auf Schiffen braucht, wo Stative, wen der schwankenden Bewegung des Schiffes ınz unnütz sind.

Daher können also solche Werkzeuge auch ıf dem Lande mit Vortheil gebraucht werden, o sich oft wegen der Unbequemlichkeit des latzes u. s. w. keine Stative hinsetzen lassen. Ber das Detail des bisher beschriebenen Werkzeugs noch genauer kennen lernen will, der findet in der Einleitung zu meines Vaters *Tabulis iotuum Solis ac Lunae*, welche die englische Admiralität im Jahre 1770. herausgegeben hat S. 21. *Chev. de Borda* hat daran och einige Verbesserungen angebracht, welche folgender Schrift: *Description et usage u cercle de Reflexion avec differentes metho-*

thodes pour calculer les observations nautiques par le Chevalier de Borda (à Paris 1787.) mit mehrerem zu ersehen sind. Das Werkzeug, so wie es mein Vater zum Behufe der Beobachtungen auf der See angegeben hat, besteht aus einem ganzen Kreise, wegen einer besondern Art die Winkel durch Wiederholung zu messen, wovon unten (§. 135.) geredet wird.

II) Ein anderer Vortheil ist, daß sich mit einem bloßen Quadranten an einem solchen Instrumente, Winkel bis auf 180° messen lassen, weil man den Spiegel ed, oder die Alhidadenregel P nur um 90° verrücken darf, wenn der auszumessende Winkel QcR würklich 180° wäre.

So gebraucht man in der Astronomie, und Schiffahrt, sogenannte Octanten, Sextanten u. s. w. oder bloß Bogen von 45°, 60°, um Winkel bis auf 90°, 120° zu messen. M. s. *Bouguer traité de la Navigation.*

Man kann aber auch, ohne Spiegel zu gebrauchen, mit einem kleinen Bogen große Winkel messen; dergleichen Methode ist in Longomontans *Astronom. Danic. sphaeric. Lib. II. cap.* 7. (*Amstel.* 1640.) angegeben, wo gezeigt wird, wie man mit einem bloßen Sextanten einen Winkel von 150° messen könne.

Man

Man sehe auch von diesem Verfahren in *Petr. Horrebowii Op. math. (Havniae* 1741) *Tom. III.* §. 253.

Zu geodätischen Messungen hat auch Brander ein Werkzeug mit Spiegeln angegeben, dessen Einrichtung man aus seiner Beschreibung eines Spiegelsextanten (Augsb. 1774.) ersehen kann. Von den vortrefflichen Hadleyischen Octanten und Sextanten, welche gegenwärtig von *Ramsden* in sehr großer Vollkommenheit verfertigt werden, redet Herr v. Zach in der Canzler-Meisnerischen Quartalschrift für ältere Litteratur und neuere Lectüre, III. Jahrgang, 8. Heft, Leipz. 1785. Auch davon in Bodens astronom. Jahrb. 1789. S. 237. 244. Umständlichere Beschreibungen und Abbildungen davon in Adams geometrischen und graphischen Versuchen aus dem Engl. von Geisler, Leipz. 1795. S. 272. rc. Die Theorie desselben, und die davon abhängenden Berichtigungsmethoden, ganz vorzüglich in Hrn. Prof. J. G. F. Bohnenbergers Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten, Göttingen 1795. Auch viel hieher gehöriges, besonders das Messen der Verticalwinkel vermittelst der Hadleyischen Sextanten betreffendes in einem Aufsatz von Hrn. Rath Wild in

dem

dem Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte des Hrn. Hofr. Voigt in Jena Xten Bandes, 2s u. 3s Stück. Gotha 1795. Von dem grossen Nutzen dieser Werkzeuge bey Ländervermessungen s. m. *von Zachs* monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde May 1801. Seite 510 ꝛc. Ferner über die Anwendung Hadleyischer Quadranten zum Vermessen besonders auf der See von Michel in den *phil. Transact.* Vol. LV. Und von der Nutzbarkeit der Hadleyischen Sextanten für die Ingenieurs von Joh. Carl Friedr. Hauf in Böhms Magazin für Ingenieurs ꝛc. XII. Band S. 327, woselbst auch die Theorie und der Gebrauch dieses Werkzeugs gelehrt wird.

Schluß dieses Kapitels.

§. 127. Das bisherige mag zureichen, Anfängern von den Einrichtungen einiger neuerer geometrischer Werkzeuge Begriffe zu geben. Man wird sich nun mit leichter Mühe in andere mehr oder weniger zusammengesetzte Werkzeuge finden können, die etwa von verschiedenen Künstlern angegeben werden.

In den meisten Anleitungen zur Feldmeßkunst wird man das Detail der Werkzeuge fast gänzlich vermissen, und dennoch läßt sich, ohne eine

e genaue Kenntniß derselben, keine geome-
ische Operation mit Sicherheit ausführen.
n so mehr hielt ich mich für verpflichtet, die-
n Mangel durch eine umständlichere Beschrei-
ung der vorzüglichsten Bestandtheile der Feld-
ssenwerkzeuge abzuhelfen, und ich glaube,
ß ich mich dabey der möglichsten Deutlich-
t beflissen habe, wenn gleich, Werkzeuge zu
schreiben, eben keine der angenehmsten Ar-
iten ist.

Von ältern Feldmesserwerkzeugen findet
an Nachrichten und Abbildungen in Leu-
olds oft angeführten Theatr. Mach. geo-
metrico, in Bions mathematischer
Werkschule und andern Schriften. Hieher
gehören z. E. der Jakobsstab, das geo-
metrische Quadrat, Kirchers Panto-
meter, Leonhard Zublers Instru-
ment zum Grundlegen einer Land-
schaft, Rimplers Instrument, Zublers
Scheibeninstrument u. a. mehr. Eine
historische Kenntniß davon dient, um zu sehen,
wie man nach und nach zu brauchbarere Einrich-
tungen gekommen ist.

Zu gewissen Absichten braucht man eben
nicht immer ein kostbares Werkzeug, daher man-
che Einrichtungen sehr einfach, und dennoch zu
diesem oder jenem Zwecke nützlich seyn können,
z. B. die sogenannte Kreuzscheibe, oder
das Meßkreuz (zwey rechtwinklicht unter ein-

an-

ander fest verbundene Liniale mit Diopteru, oder auch nur ein Brett, worauf zwey Linien auf einander senkrecht eingerissen sind, zu Absteckung rechter Winkel) welches beym Aufnehmen militärischer Plans nach dem Augenmaaße, beym Durchstecken der Schlaglinien in Forsten (man s. C. W. Hennerts, Königl. Preußischen Forstrath, kurze Anweisung zu einigen geometrischen Hülfsmitteln, welche den Forstbedienten in solchen Forsten, die in Schläge eingetheilt sind, bey verschiedenen Fällen nützlich seyn können, Berlin und Stettin 1789.), und zu andern Arbeiten, wobey eben nicht die größte Schärfe erforderlich ist, dienen kann. Von der Kreuzscheibe, wie auch von andern Werkzeugen, die ohne große Kosten sich verfertigen lassen, handelt auch Helfenzrieders Geodäsie 8. Kap. Herr Conrector Voigt in Quedlinburg hat in seinen neuen praktischen Entdeckungen in der Geometrie, Quedlinb. und Leipz. 1781. einen Winkelmesser zu eben dieser Absicht angegeben. Auch kann hieher J. G. Steinhäusers Beschreibung eines katoptrischen Maaßstabes eines neuen Winkelmessers (*Gilberts* Annalen d. Physik. XVter B. S. 377.) gerechnet werden.

Zum Schlusse erwähne ich noch einiger Werkzeuge, welche vorzüglich zu größern Feldarbeiten bestimmt sind.

Hie-

Hieher gehört der von Brander angegebene optrische Sector wovon man Lamberts Anmerkungen über die Branderschen Glasmicrometer, Augsburg 1769. nachsehen kann.

Ferner ein Winkelmesser, welchen Hr. von Osterwald in den Abhandl. der Churfürstl. Bayrischen Acad. der Wissensch. B. II. Th. S. 113. beschrieben und zum geographischen Landmessen eingerichtet hat.

Meiner Meynung nach ist aber dieses Instrument etwas zusammengesetzt, und die Verfertigung desselben erfordert einen geschickten und sorgfältigen Künstler, wenn sich die Winkel bis auf 5 Secunden, wie am angeführten Orte versprochen wird, genau damit sollen messen lassen. Es werden nämlich die kleinern Abtheilnngen durch Schraubenmicrometer bestimmt, welche in feine an dem Umfang des Randes eingeschnittene Schraubengewinde, nach Art einer Schraube ohne Ende, eingreiffen. Diese Schraubengewinde durch den ganzen Umfang des Randes durchaus von gleicher Weite zu machen, halte ich, soviel mir von mechanischen Arbeiten bekannt ist, nicht für gar zu leicht, und es gehören dazu besonders sehr gut eingerichtete Schneidezeuge, so wie ein äusserst genau abgedrehter Rand. — Dieses Werkzeug dienet auch besonders an solchen Orten, wo sich keine Stative bequem anbringen lassen.

Ein anderes Werkzeug zum geographischen Landmessen findet man in Thomas Bugge Beschreibung der Ausmessungsmethode, welche bey den dänischen geographischen Chärten angewendet worden, (Dresden 1787.) abgebildet. Das Stativ hat sehr viel Aehnlichkeit mit dem des Sissonischen beweglichen Quadranten auf der Göttingischen Sternwarte. Es ist indessen dieses Werkzeug dasjenige, welches Eckström in den Abhandl. der schwed. Acad. der Wiss. 1750. angegeben hat.

Ferner gehören hieher die sogenannten Theodoliten und Geotheodoliten der Hrn. Ramsden und Adams (man s. die oben §. 89. XV. angeführte Schrift von Geisler und Adams S. 264 u. f.). Der von dem schwedischen Ingenieur *Jon Osverbom* beschriebene neue Winkelmesser in Hrn. v. *Zach* monatl. Correspondenz, October 1801. S. 334. die vortreflichen Reichenbachischen Repetitionstheodoliten (oben §. 89. XVIII.) und mehr andere ähnliche Werkzeuge.

Wenn das Werkzeug, welches ich oben (§. 99. ꝛc.) beschrieben habe, einen Durchmesser von etwa 18 Zollen hat, so ist es auch zum geographischen Landmessen hinreichend. Nur müssen alle Vorrichtungen in Absicht auf den festen Stand des Werkzeugs, verhältniß-

mäßig

äßig in der gehörigen Stärke gemacht werden, welches ich dem Mechanico zu beurtheilen überlasse. Ich zeige nunmehr die Ausmessung der Winkel mit diesem Werkzeuge, nur um ein Beyspiel von Operationen dieser Art zu geben. Man wird sich dann leicht auch in andere Winkelmesser finden können, wie auch die Beschaffenheit ihrer Eintheilungen, ihrer Nonien, ihrer groben und feinen Bewegungen u. s. w. von dem angegebenen verschieden seyn mögen.

VIII. Kapitel.

Von Bestimmung und Ausmessung der Winkel auf dem Felde, besonders mit dem Meßtische, dem Astrolabio, der Boussole u. s. w., nebst den dabey nöthigen Bemerkungen.

§. 128.

Aufgabe.

Die Größe eines auf dem Felde vorgegebenen Winkels, auf dem Meßtische zu bestimmen.

Auflösung.

1) Es sey Tab. VII. Fig. LXXVIII. C ein Punkt auf dem Felde, durch welchen man sich eine Horizontalfläche gelegt vorstelle. P und Q seyen ein paar Punkte oder Objecte, nach Gefallen über der Horizontalfläche erhaben. Nun gedenke man sich durch P, Q ein paar Verticallinien Pp, Qq, die bey p, q in diese Horizontalfläche eintreffen, und nach p, q die Linien Cp, Cq, hingezogen, so werden die beyden Linien Cp, Cq, Horizontallinien seyn, und der Winkel pCq, wird der Neigungswin-

kel

seyn, den ein paar Verticalebenen PpC, qC, durch den Punkt C und die Objecte Q gelegt, mit einander machen.

Man soll auf dem Papiere des Meßtisches ien Winkel angeben, der dem Horizontalwin- l pCq gleich ist.

II) Um dieses zu leisten, bringe man den Meßtisch Fig. LIV. über den Punkt C Fig. XXVIII, eröffne die Beine des Statives so eit, bis das Werkzeug eine bequeme Höhe ber den Boden hat, und gebe dem Tischblatt , indem man es in der Nuß herumwendet, nd die Schrauben y., y, y zu Hülfe nimmt, §. 108. 6), vermittelst einer darauf gesetzten Wasserwaage (§. 113), eine genaue horizon- ale Stellung.

III) Es stelle also das Viereck abgd Fig. LXXVIII. den Meßtisch in seinem horizonta- n Stande über dem Punkte C vor, dann ird die Ebene des Tisches abgd mit der Horizontalfläche pCq parallel seyn.

IV) Man nehme auf dem Meßtische einen Punkt h an, der lothrecht über A liegt. Um dieses zu bewerkstelligen, bedient man sich sehr bequem einer sogenannten Gabel Fig. LXXIX. Diese Vorrichtung besteht aus zwey Armen, der hölzernen Stäben rs, tv, die durch den Querleisten sv mit einander verbunden sind,

und so die Gestalt einer Gabel bilden. Die Längen rs, tv, mögen etwa die halbe Breite des Meßtisches betragen; am Ende des untern Armes vt, muß ein Faden mit einem Lothe herabhängen. Will man nun auf dem Meßtische einen vertical über C liegenden Punkt h angeben, so schiebt man diese Gabel an das Tischblatt, bewegt sie hin und her, so daß rs die obere Fläche des Tischblatts, und tv die untere Fläche desselben beschreibt, und giebt ihr eine solche Lage, daß das an dem Arme vt befindliche Loth, gerade über den Punkt C (II) hängt, so wird der Endpunkt r des Schenkels sr, auf dem Meßtische den Punkt h vertical über C angeben.

V) In diesen Punkt h steckt man eine sehr feine, mit einem Knöpfgen von Siegellack versehene, Nehnadel ein, und legt die Schärfe ik des Fig. LXVIII. und §. 111. 1. beschriebenen Diopterlinials an die Nadel.

VI) Visirt alsdann durch die Oculardiopter, wendet und dreht das angelegte Diopterlinial so lange um die Nadel, bis z. B. das Object P gerade hinter dem in der Objectivdiopter ausgespannten Verticalfaden erscheint, und zieht hierauf längs der an der Nadel liegenden Schärfe des Linials, mit einem wohl zugespitzten Bleystift eine gerade Linie her. Während daß dieses geschieht, muß das Linial

n unverrückter Lage erhalten, und daher so
ange etwas angedrückt werden. Noch besser
t es, wenn man von einem Gehülfen die Li-
ie ziehen läßt, so kann man unterdessen im-
ner das Auge vor der Oculardiopter behalten,
ach dem Objecte P visiren, und so die ge-
ingste Verrückung der Diopterregel bemerken.

VII) Es sey also hn die auf dem Meß-
sche durch den Punkt h gezogene Linie, so
vird hn in der Verticalebene CpP liegen, die
nan sich durchs Object P; und den Punkt C
nbildet. Denn der Punkt h auf dem Meß-
sche liegt vertical über C (IV) und folglich in
er Verticalebene CpP. Weil nun die Ebene
es Meßtisches horizontal gestellet worden, und
er Schlitz in der Oculardiopter, nebst dem
aden der Objectivdiopter, auf der Ebene des
Diopterlinials, und folglich hier auf der hori-
ontalen Ebene des Meßtisches senkrecht stehen,
werden Schlitz und Faden auch beyde in der
Verticalebene hCpP liegen, wenn die Diopteru
ach dem Objecte P hingerichtet sind. So ist
emnach hn die Durchschnittslinie der Vertical-
bene hCpP, mit der horizontalen Ebene des
Meßtisches, und hn mit Cp parallel.

VIII) Sobald nun die Linie hn gezogen
vorden, richtet man die Diopteru auch nach
em Objecte Q, und ziehet abermahls auf dem
Meßtische wie in (VI), längs der an der Ma-

del liegenden Schärfe des Linials, eine gerade Linie hc, so wird eben so hc in der Verticalebene hCQq liegen, und parallel mit Cq seyn müssen.

IX) Während man aber die Diopteru nach Q hinrichtet, muß man wohl dafür sorgen, daß der Meßtisch sich nicht verrücke, und folglich die zuerst gezogene Linie hn aus ihrer wahren Richtung komme.

X) So erhält man demnach auf dem Meßtische einen Winkel nhc, dessen Schenkel hn, hc, mit den Schenkeln Cp, Cq, des Winkels pCq gleichlaufend sind, und daher muß nhc = pCq seyn. (M. s. Kästners Geometrie, 46 Satz. 2. Zus.)

Dieser Horizontalwinkel nhc = pCq ist nun zugleich der Neigungswinkel der beyden Verticalebenen CphP, CqhQ, welchen man finden wollte.

Zusatz.

§. 129. Gewöhnlich hat man beym Gebrauche des Meßtisches blos die Absicht, den Horizontalwinkel pCq auf dem Felde, zu Papiere zu bringen. Verlangte man aber auch zugleich die wahre Größe dieses Winkels pCq, in Graden und Minuten, so müßte man nhc auf dem Meßtische, etwa vermittelst des

gerad-

jeradlinigten Transporteurs (§. 106. 16) messen. Allein, selten pflegt man diese Absicht bey dem Meßtische zu haben; wenn man den Winkel nur zu Papiere gebracht hat, so ist der Zweck erfüllt, und verlangt man den Winkel pCq n Graden und Minuten, so findet man ihn icherer durch Hülfe des Astrolabii.

Zusatz.

§. 130. I. Es pflegt meistens zu geschehen, daß auf dem Meßtische eine Linie hv, nd ein Punkt h in ihr, schon gegeben sind, ıan soll den Winkel pCq, auf dem Meßtische erzeichnen, so, daß der gegebene Punkt h die Spitze des Winkels, und die gegebene Linie hv en einen Schenkel desselben abgiebt: In diem Falle verfährt man so;

II. Man bringt erstlich den Meßtisch in ne horizontale Lage, und den gegebenen Punkt, , vertical über C nach §. 128. II. IV, und gt hierauf die Schärfe des Diopterlinials an e gegebene Linie hv sehr genau an.

III. Nun muß die Linie hv in die Verticalche hCPp eingerichtet werden. Dieß schieht auf folgende Art.

IV. Man löse an dem Meßtische die Schrau x Fig LVI, um nach (§. 198. 7.) der gann Ebene des Tischblatts eine horizontale Wen-

dung zu geben, lasse an der vorgegebenen Linie hv das Diopterlinial unverrückt liegen, und wende das Tischblatt horizontal herum, bis das an die Linie hv angelegte Diopterlinial in eine solche Lage hn kömmt, bey der der Faden der Objectivdiopter den Gegenstand P deckt. In dem Augenblicke, da dies geschieht, ziehe man die Schraube x wieder an.

V. Hiedurch kann sich aber das Object P sehr leicht wieder etwas aus dem Faden der Objectivdiopter verrücken. Um also die genaue Stellung wieder zu erhalten, bediene man sich der Stellschraube ze (Fig. LVIII.) welche nach §. 108. 7. dem ganzen Tische eine sanfte horizontale Bewegung ertheilt, so wird hiedurch der Faden der Objectivdiopter wieder genau nach dem Objecte P hingerichtet werden können.

VI. Ist nun auf diese Art die gegebene Linie hv durch Herumwendung des ganzen Meßtisches genau in die Lage hn gebracht, d. h. in die Verticalfläche hCPp eingerichtet worden, dann läßt man die Ebene des Tisches in unverrückter Lage, wendet blos das Diopterlinial herum, und richtet es nach dem Objecte Q, so kann man alsdann den andern Schenkel hc des Winkels auf dem Meßtische bestimmen §. 128 VIII, und folglich an die gegebene Linie hv (nachdem sie nämlich in die Richtung gebracht worden) und an den gegebenen

Punkt

Punkt h, einen Winkel $nhc = pCq$ verzeichnen.

VII. Wenn der lothrecht über C gestellte Punkt h sich während der Horizontalwendung des Tischblatts (IV. V.) nicht wieder verrücken soll, so muß sich h über der Umdrehungsaxe des Tischblattes befinden. Ausserdem beschreibt h während der Umdrehung des Tischblattes einen desto grössern Kreis, je weiter h nach dem Rande des Meßtisches zu liegt. Wenn also h lothrecht über C gestellt worden (I), so würde sich h aus seiner Lage über C merklich wieder verrücken, wenn man den Meßtisch noch viel herumwenden müste, während man hv nach P einrichtet (III). Es ist daher nöthig, daß, ehe man h lothrecht über C stellt (I), man vorher wenigstens nach dem Augenmaaße die Linie hv nach P gerichtet habe, damit der Meßtisch, bey der völlig genauen Einrichtung (II - V), nicht viel mehr gewendet werden darf. Mehrere hieher gehörige nöthige Bemerkungen s. m. im zweyten Theile dieser pract. Geom. §. 183. 4. Sind die Objecte P, Q sehr weit entfernt, so kommt es übrigens so sehr nicht darauf an, daß h so genau lothrecht über C liege.

Anmerkungen.

§. 131. I) Es ist nothwendig, daß, wenn man mit dem Bleystift neben dem Diopterliniale

herzieht, die gezogene Visirlinie genau durch den Punkt h gehe. Den Bleystift muß man daher beständig geschärft halten, und mit ihm sehr genau längs der an dem Punkt h liegenden Seite des Linials herfahren.

II) Anfängern, die noch nicht geübt sind, ist es freylich bequem, das Diopterlinial um eine in h eingesteckte Nadel zu drehen. Weil aber, zumahl wenn die Nadel nicht recht fein ist, ihre Dicke unterweilen verhindert, die Linie genau durch h zu ziehen, welches bey manchen Feldmesserarbeiten zu erheblichen Fehlern Gelegenheit geben kann, so ist es besser, sich gar keiner Nadel zu bedienen, sondern das Diopterlinial blos an den Punkt zu legen, und so nach den Gegenständen zu richten. Wer den Versuch anstellen will, wird finden, daß dieß so gar schwer nicht ist, und sich durch einige Uebung bald lernen läßt. Ich pflege mich nie einer Nadel zu bedienen, und bringe dennoch das Diopterlinial sehr bald in die Lage, daß, wenn es nach einem Gegenstande hingerichtet worden, auch die Schärfe desselben genau an dem Punkte h anliege.

III) Es versteht sich, daß unter dem bisher gebrauchten Worte Object, vielmehr nur ein gewisser bestimmter Punkt desselben verstanden werden muß. Wären daher die Objecte P, Q z. E. ein paar Thürme, so würde man

an etwa nach den Spitzen derselben hinvi-
:en.

IV) Oft liegen die Objecte P, Q, so hoch
der tief, daß die Dioptern zu niedrig sind,
in nach ihnen hinvisiren zu können. In die-
m Falle stecke man zwischen dem Standpunkte
des Meßtisches und den Objecten P, Q, erst
Stäbe in die Verticalebenen CpP, CqQ, und
isire hierauf nach diesen Stäben. Bey die-
m Abstecken der Stäbe sind aber alle Vor-
chten zu beobachten, welche oben (§. 33.)
elehrt worden sind, damit, wenn man auf
em Meßtische die Visirlinien hn, hc nach
en Stäben hinzieht, man versichert seyn kann,
aß sie auch genau in den wahren Vertical-
benen CpP, CqQ liegen würden.

V) Wenn man sich auf dem Meßtische
er dioptrischen Regel Fig. LXIX. bedient, bey
welcher die Visirlinie durch die Mitte des Li-
ials geht, so muß man Sorge tragen, beym
Visiren nach verschiedenen Objecten, immer eine
und dieselbe Seite des Linials an den Punkt,
oder an die Nadel zu legen, weil sonst Fehler
zu besorgen sind, wenn man bald die eine,
bald die andere Seite des Linials anlegte,
und nicht überzeugt wäre, daß beyde genau
unter sich, und mit der Visirlinie parallel
laufen.

VI) Während man Fig. LXXVIII. das
Diopterlinial aus der Lage hn, in die Lage hc

bringt, und die Linie hc ziehet, muß der Meßtisch in unverrückter Lage erhalten werden, damit hn nicht aus ihrer Richtung komme. Nun kann es aber leicht geschehen, daß durch einen Zufall sich der Meßtisch etwas verrücket. Um also, nachdem man hc gezogen hat, zu untersuchen, ob hn noch in ihrer gehörigen Richtung sich befinde, so legt man das Diopterlinial wieder genau an die Linie hn; deckt alsdann der Faden der Objectivdiopter noch genau den Gegenstand P, so hat sich der Meßtisch nicht verrückt: erscheint im Gegentheil das Object P nicht genau hinter dem Faden, so ist eine kleine Verrückung des Tisches vorgefallen, und man muß daher die Linie hn wieder einrichten, und hierauf noch einmal nach dem Objecte Q hinvisiren, um den wahren Winkel auf dem Meßtische zu bekommen.

Diese Methode, den unveränderten Stand des Meßtisches zu erfahren, ist ohnstreitig eine der besten und zuverlässigsten.

VII) Einige aber bedienen sich der Magnetnadel zu dieser Prüfung, und verfahren so: Gleich anfangs, ehe sie nach den Objecten P, Q hinvisiren, ziehen sie auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel. Sie wenden nämlich das Diopterlinial so lange, bis die Magnetnadel genau über der Linie einspielet, die auf dem Boden des Magnetkästgens eingerissen ist,

d ziehen hierauf längs des Diopterlinials
ie gerade Linie, also die Richtung der Magnet-
del (§. 121.) auf den Meßtisch. Nun erst
rd nach den Objecten P, Q hinvisirt, und
f dem Meßtische, hn, hc gezogen. Um
n zu erfahren, ob während dieser Arbeit sich
r Stand des Tisches verändert hat, so legen
das Diopterlinial wieder genau an die gleich
nfangs gezogene Richtung der Magnetnadel,
nd lassen die Nadel in Ruhe kommen; Spielt
e nun wieder genau über der Linie auf dem
Boden des Magnetkästgens ein, so hat sich
er Meßtisch nicht verrückt, im Gegentheil
ber hat sich dessen Lage verändert, und man
uß daher hn, hc wieder von neuem be-
timmen.

Diese Methode aber, den unverrückten
Stand des Meßtisches zu erforschen, ist bey
Weitem nicht so richtig, als die erstere (VI).
Denn es kann nur eine sehr geringe Verrük-
ung des Tisches vorgefallen seyn, daß eine
Magnetnadel, wenn sie nicht sehr beweglich ist,
olche kaum empfindet; Auch können selbst bey
der Beobachtung, ob die Nadel über der er-
wähnten Linie auf dem Boden des Kästgens
einspielet, kleine Fehler vorfallen, zumahl wenn
man das Auge etwas seitwärts, und nicht ge-
rade über der Linie hält; und endlich mögte
ich auch wegen viel zufälliger Umstände, welche
auf die Richtung der Magnetnadel Einfluß ha-

ben können, nicht rathen, sich bey Stellung eines Meßtisches völlig auf die Magnetnadel zu verlassen. Wenn etwas genaues geleistet werden soll, wird die erstere Methode (VI) allerdings den Vorzug verdienen, und nur in besondern Fällen kann die Richtung eines Meßtisches nach der Magnetnadel zugelassen werden.

VIII) Eine dritte Methode, den Stand des Meßtisches, oder überhaupt eines geometrischen Werkzeugs zu prüfen, bestehet in dem Gebrauche der sogenannten Versicherungsdioptern. Diese Vorrichtung bestehet in ein paar Dioptern, welche an die untere Fläche des Meßtisches befestigt, und, um den Stand desselben zu prüfen, auf folgende Art gebraucht werden.

Man untersuche, indem man durch diese Versicherungsdioptern visirt, was hinter dem Faden der Objectivdiopter, in der Ferne etwa für ein kenntlicher Gegenstand erscheint, nachdem man dem Tische die gehörige Stellung gegeben hat: oder, wenn hinter dem Faden nicht gerade ein kenntliches Object erscheint, so lasse man in einiger Entfernung einen Stab abstecken, so daß er von dem Faden der Objectivdiopter bedeckt wird. Will man nun in der Folge den Stand des Tisches prüfen, so darf man nur durch diese Versicherungsdioptern visiren, und nachsehen, ob sie noch genau auf den in der Ferne abgesteckten Stab, oder sonst be:

merkten Gegenstand, hinweisen. Geschieht dieses, so ist man versichert, daß, während man auf dem Tische handthierte, keine Verrückung desselben vorgefallen ist. Bemerkt man aber das Gegentheil, so hat sich derselbe verrückt, und man muß ihn von neuem einrichten. So kann man sich demnach in jedem Augenblicke von dem richtigen und ungeänderten Stande des Werkzeugs versichern.

IX) Zu eben dem Zwecke dient, zumahl an einem Astrolabio, auch ein Versicherungs-Fernrohr, welches gewöhnlich an der untern Fläche des eingetheilten Randes befestigt wird. Es versteht sich, daß ein solches Fernrohr in seinem Brennpunkte ebenfalls mit einem ausgespannten Faden, oder einem ebenen Glase, worauf Kreuzlinien, wie oben (§. 104.) eingerissen sind, versehen seyn muß, um nach einem bestimmten Punkte eines Objects visiren zu können.

X) Damit man aber nicht allemahl nöthig habe, im Falle sich kein kenntlicher Punkt eines entfernten Objects sogleich genau hinter dem Faden eines Versicherungs-Fernrohres zeigte, in die Ziellinie desselben einen Stab abzustekken (VIII), (welches offenbar immer einen Aufenthalt bey Ausmessung der Winkel verursachen würde) so ist anzurathen, die Einrichtung so zu machen, daß das Versicherungs-Fernrohr nicht ganz unbeweglich ist, son-

dern vermittelst einer Stellschraube etwa um ein paar Grade verrückt werden kann, damit man es genau nach einem kenntlichen Punkte eines entfernten Gegenstandes einrichten kann. Vielleicht wäre es zumahl bey sehr hohen Standpunkten z. B. auf Bergen nicht überflüssig, wenn das Versicherungs-Fernrohr, wie eine Kippregel auch um einige Grade gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt, und in jeder bestimmten Lage festgestellt werden könnte. Die Vorrichtung dies zu bewerkstelligen, kann leicht von jedem Mechanicus angegeben werden, und bedarf hier kaum einer weitern Erläuterung. Man wird finden, daß diese Einrichtungen des Versicherungs-Fernrohres insbesondere bey der Winkelmessungsmethode §. 135. von sehr großen Nutzen sind. Ist ein Versicherungs-Fernrohr auf die angeführte Art nicht ganz unbeweglich, so wird es dennoch ein unbewegliches genannt, um es von solchen zu unterscheiden welche rings in einem Kreise herum bewegt werden können, wie man sie jetzt zu verschiedenen Zwecken so einrichtet. M. s. unten §. 136. V.

XI) Dieser Gebrauch der Versicherungsdioptern, und Fernröhre, ist bey einem jeden geometrischen Werkzeuge anzurathen, womit man Messungen von Wichtigkeit anzustellen hat.

Aufgabe.

§. 132. Einen Winkel auf dem
elde vermittelst des (§. 99.) beschrie-
enen Astrolabii auszumessen.

Aufl. I) Es seyen Fig. LXXX. Tab.
'II, P und Q wieder ein paar Gegenstände
uf dem Felde. C ein gegebener Punkt, und
'p, Qq Perpendikel auf die horizontalfläche
urch C, man verlangt die Größe des Hori-
ontalwinkels pCq, oder des Neigungswinkels
er beyden Verticalebenen CpP, CqQ, in
Graden und kleinern Theilen.

II) Nachdem man das Werkzeug Fig.
.IX. auf die Nuß Fig. LXIV. und diese auf den
Zapfen S des Stativs Fig. LXV. gesetzt hat,
o bringe man die ganze Vorrichtung über den
Punkt C des auszumessenden Winkels pCq
Fig. LXXX, so, daß der Mittelpunkt des ein-
getheilten Randes lothrecht über C zu liegen
omme, und gebe dem Stative zugleich eine
bequeme Höhe.

III) Man bringe hierauf durch Drehung
der Alhidadenregel die Indices oder Anfangs-
triche der beyden Verniere (§. 103. 1.) genau
an die Theilstriche des Randes, wo sich die
Abtheilungen desselben anfangen, und befestige
die Alhidadenregel in dieser Lage an den Rand,
indem man die untere Schraube x (§. 99. 9.)
anziehet.

S

Sollten sich, durch dies Anziehen der Schraube x die Indices wieder etwas verrükken, so kann man sie vermittelst der Micrometerschraube MK, wieder genau an die ersten Theilstriche des Randes bringen.

IV) Auch ziehe man die Schraube U Fig. LXIV. an, wodurch die Nuß auf den Zapfen S des Stativs befestigt, und unbeweglich erhalten wird.

V) Man gebe hierauf dem Werkzeuge, indem man es in der Nuß herumwendet, eine genaue horizontale Stellung, vermittelst einer auf den Rand gesetzten Wasserwaage. Befestige alsdann auch die an der Nuß befindliche Schraube H Fig. LXIV. damit das Werkzeug in seiner horizontalen Stellung unverrückt erhalten werde.

VI) Nach dieser Vorbereitung löse man nun die Schraube L (§. 99. 16. und Fig. LIX.) so wird sich das ganze Werkzeug auf dem Zapfen der Nuß horizontal herumwenden, mithin auch das Fernrohr nach einem jeden Gegenstande hinrichten lassen, ohne daß man nöthig hat die Alhidadenregel selbst um ihr Centrum zu drehn, und sie dadurch aus der Lage (III) zu verrükken, in der man sie an den Rand befestigt hatte. Da ich annehme, daß das Fernrohr, Kipprohr (§. 99. 18.) in einer auf dem zeuge senkrechter Ebene auf und nieder bewegs

:glich ist, so kann es nach Gegenständen hin- richtet werden, wenn sie sich auch nicht in ner Horizontalebene durch den Mittelpunkt s Werkzeugs befinden. Es versteht sich, daß des Object, nach welchem das Fernrohr hin- :let, allemahl genau hinter der in dem Fern- hre vertical sich darstellenden Linie cd (Fig. XVII.), wodurch nach (§. 104.) die eigent- che Dioptrische- oder Visirebene be- immt wird, erscheinen muß.

VII) Man wende also das ganze Werk- :ug so lange, bis man durchs Fernrohr das bject Q Fig. LXXX. erblickt. So bald die- s geschieht, ziehe man die (VI) erwähnte 5chraube L wieder an, hemme dadurch die robe Bewegung des Werkzeugs, und ende hierauf die Stellschraube WZ Fig. VIII. §. 99. 1s. herum, um der ganzen Ebene :s eingetheilten Randes eine sanfte hori- ontale Bewegung zu ertheilen, so wird an dadurch in den Stand gesetzt werden, das ernrohr völlig genau nach dem Objecte Q hin- ırichten, so daß Q hinter der Linie cd (VI) :scheint, die auf dem in dem Brennpunkte des ernrohrs eingesetzten Planglase eingerissen ist.

VIII) Es stelle also lλnc Fig. LXXX. en eingetheilten Rand des Winkelmessers vor, nd h dessen Mittelpunkt lothrecht über C, or as blos durch die Bewegung des ganzen Werk- :uges (VI) nach Q gerichtete Fernrohr, und

In die Alhidadenregel, mit ihrer Vernierplatte vs, deren beyde Indices noch immer genau an den ersten Theilpunkten des Randes anliegen müssen (III). In gegenwärtiger Figur ist die Vernierplatte, wenn der Beobachter nach Q visirt, rechter Hand der Alhidadenregel gezeichnet. Nach der Einrichtung des Werkzeugs Fig. LVIII. müßte man sich solche eigentlich linker Hand der Alhidadenregel vorstellen. Beydes macht in der Hauptsache keinen Unterschied, so wie es sich denn auch aus der Art, wie die Abtheilungen auf dem Rande gezählt werden, bald ergiebt, nach welchem Objecte man in (VII) das Fernrohr zuerst richten muß, damit wenn es nachher nach einem zweyten hingewandt wird, die Alhidadenregel sich nach der Ordnung der auf den Rand geschriebenen Zahlen und nicht rückwärts bewege.

IX) Man löse nun die Schraube x des Alhidadenhalters (§. 99. 9.), wende die Alhidadenregel langsam herum, damit die Ebene des eingetheilten Randes nicht die geringste Verrückung leide, und bringe sie in die Lage λc, bey welcher man durchs Fernrohr den Gegenstand P erblickt. Ziehe hierauf die erwähnte Schraube x wieder an, und bringe vermittelst Umwendung der Micrometerschraube, wodurch man der Alhidadenregel, mithin auch dem Fernrohre eine sanfte Bewegung ertheilt, das Fernrohr völlig genau in die Richtung nach dem Objecte P.

X) Wenn dies geschehen, so untersuche
an auf beyden Abtheilungen des Randes die
ogen, welche beyde Indices der Verniere,
durch, daß man die Alhidadenregel aus der
tern Lage ln in die zweyte λc brachte, be-
rieben haben, so findet man nach der §. 103.
ebenen Anleitung den Winkel lhλ, um wel-
n die Alhidadenregel gedrehet worden. Eben
er Winkel lhλ ist dem Verticalwinkel chn,
hin auch dem Winkel pCq gleich, den die
y Verticalebenen durch P und Q, am
andpunkte C des Werkzeugs, mit
nder machen.

XI) Wäre das Werkzeug nicht mit einem
pfernrohre versehen, um auch nach erhöhe-
oder vertieften Gegenständen visiren zu kön-
, so muß man die Ebene des Werkzeugs
t, in die Ebene PhQ des auszumessenden
kels stellen, und nun den schiefen Winkel
Q messen, in welchem Falle denn die Ob-
allemahl in dem Durchschnitte der Kreuz-
ı cd, ef, (Fig. LXVII. §. 104.) erschei-
müssen. Um aber aus diesem schiefen Win-
'hQ nunmehr den horizontalen pCq,
nan eigentlich verlangt, bestimmen zu kön-
muß man nach (§. 8.) ausser dem Win-
hQ, auch noch die Elevations- oder
ressions-Winkel der Gegenstände P,
ı Ansehung der durch h gehenden Hori-
ebene messen. Daß dies alles eine äus-

serst beschwerliche Sache ist, wird derjenige bald empfinden, welcher mit keinem solchen Kippfernrohre an seinem Werkzeuge versehen ist, und eine Menge von Winkeln, um einen Standpunkt herum zu messen hat.

Anmerkung.

§. 133. I. Weil die Ebene des eingetheilten Randes unverrückt bleiben muß, während man die Alhidadenregel, aus der ersten Lage In, in die zweyte λc drehet, so wird man bey dieser Aufgabe den Nutzen eines Versicherungs-Fernrohrs (§. 131. IX. X.) an dem Astrolabio verspüren, zumahl wenn aus demselben Stande C noch mehrere Winkel aufzunehmen wären.

II. Man kann solchergestalt mit einem Winkelmesser, dessen Rand aus einem ganzen Kreise bestehet, aus einem einzigen Stande C, so viel Winkel am Horizonte herum messen, als man will, ohne daß man nöthig hat, das Werkzeug von neuem zu stellen.

Wäre z. E. R ein drittes Object, und Rr eine Verticallinie auf die Horizontalfläche, so darf man nur, so bald der Winkel pCq, auf dem Werkzeuge bestimmt worden, die Alhidadenregel weiter herumdrehen, das Fernrohr nach dem Objecte R hinrichten, und dann eben den durchlaufenen Bogen auf dem Rande

des

Werkzeugs untersuchen, so hat man den
rizontalwinkel $qC\rho$, vorausgesetzt, daß die
ene des Werkzeugs aus ihrer anfänglichen
e, wo das Fernrohr nach Q hingerichtet
, nicht verrückt worden ist.

Auch hätte man alsdann, wenn es nöthig
e, den Winkel $pC\rho = qC\rho - qCp$.

III. Hat man auf diese Art aus einem
gen Stande viele Winkel zu messen, so
man in dem Diario folgende Umstände
rken.

Erstlich: Die Nahmen der Objecte P,
k u. s. w.

Zweytens: Was die Indices der bey-
Berniere, nachdem das Fernrohr allemahl
einem Objecte hingerichtet worden, auf den
eilungen des Randes für Grade und Mi-
weisen. Und endlich

Drittens: Um wie viel Revolutionen
Micrometerschraube, der Index des Ver-
bey jeder Richtung des Fernrohrs, von
nächsten Theilstriche des Randes absteht.
letztere ist indessen nur nöthig, wenn man
nzeln Minuten, die die Vernierabtheilun-
ngeben, genauer prüfen, und die Fehler,
ey der Beobachtung des Zusammentreffens
Theilstriche des Vernier mit denen des
es, vorgefallen seyn möchten, schätzen will.
)3. 3.).

IV. Exemp. Bey der anfänglichen
tung des Fernrohrs nach dem Objecte Q
den beyde Indices der Vernierplatte, gen
den ersten Theilstrichen des Randes, und
ten also auf beyden Abtheilungen des R
0°. 0′. 0″.

Gesetzt nun, nachdem das Fernrohr
dem Objecte P hingerichtet worden, wies
Index des V. der 90 Theilung 46°.
der Index des V. der 96 Theilung
50 b + $\frac{1}{32}$ b. (§. 102. II. und §. 10
und vermittelst der Micrometerschraube
man, daß der Index des V. der 90 Th
dem Theilstriche des Randes, der zu 46
hört, um $7\frac{22}{32}$ Revolutionen der Micro
schraube abstände (§. 101. VII.), so w
diese Data etwa auf folgende Art ins Di
zu stehen kommen.

Obj.	n. d. 90 Thl.	n. d. 96 Thl.	n. d. Microm
Q	0°. 0′. 0″	0 . 0 . 0	0 . 0 .
P	46°. 56. 0″	50 b + $\frac{1}{32}$ b	46° + $7\frac{22}{30}$

Und so hätte man demnach für jeden
kel wie qCp, 3 Angaben, welche nach ge
ger Berechnung einander zu gegenseitiger
gleichung und Berichtigung dienen. Wenn
es für gut befindet, so kann man wie (§. 10
ein arithmetisches Mittel daraus nehmen.

Wie man den Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohrs §. 104. eine solche Lage giebt, daß eine davon in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene liege.

§. 134. Es wird bey Ausmessung eines inkels, den zwey Verticalebenen auf dem Felde einander machen, offenbar zum vorausge- , daß die Linie im Brennpunkte des Fern- rs (nämlich cd Fig. LXVII. und §. 104.) er der die Gegenstände erscheinen müssen, iner auf der Alhidadenregel oder auf der ne des eingetheilten Randes senkrechten Ebene , damit, wenn die Ebene der Alhidadenre- oder des eingetheilten Randes horizontal ge- t worden, die erwähnte Linie vertical sey.

Um nun dieser Linie ihre gehörige Lage zu l, so bringe man die Ebene des eingetheilten des in eine horizontale Stellung (§. 113.) lasse in einiger Entfernung an einem Faden oth herabhängen. (Statt dessen auch ir- eine verticale Gränze eines entfernten Ge- ndes dienen kann).

Hierauf löse man die Schraube des Alhi- halters, wende die Alhidadenregel herum, ichte das Fernrohr nach diesem Lothe:

Wenn nun die §. 104. erwähnte Linie cd er Richtung dieses Lothes zusammenfällt, ße ihre gehörige Stellung.

Ge-

Geschiehet dieses nicht, so löse man Fig. LXVI. die Schräubgen d, d, die das Fernrohr in der Hülse K festhalten, und wende das Fernrohr in seiner Hülse herum, bis die erwähnte Linie im Brennpunkte des Fernrohrs mit der Richtung des Loths zusammenfällt.

Sobald dieses geschiehet, ziehe man die Schrauben d, d, wieder an, so wird alsdann die erwähnte Linie in ihrer gehörigen Lage unverrückt erhalten werden können.

Ist das Fadenkreuz nicht in der Objectivröhre des Fernrohrs (wie §. 104.), sondern in der Ocularröhre selbst angebracht, wie öfters zu geschehen pflegt, so kann die Linie c d des Kreuzes, auch durch Umdrehung der Ocularröhre, in die gehörige Vertical-Lage gebracht werden.

Diese Prüfung und Berichtigung der erwähnten Linie, muß man allemahl vorher anstellen, ehe man zur würklichen Ausmessung der Winkel schreitet.

Tod.

Tob. Mayers Methode (*comment. Soc. R. Goett. T. II. ad annum 1752.*) einen Winkel auf dem Felde sehr genau auszumessen, wenn gleich der Winkelmesser, dessen man sich hierzu bedient, merkliche Fehler in der Theilung des Randes u. s. w. hätte.

§. 135. Diese Methode kann mit Nutzen uf dem Felde gebraucht werden, wenn man ie Größe eines Winkels zu einer gewissen Abcht sehr genau messen will, und ist kürzlich olgende.

I) Es sey der Winkel P g Q Fig. LXXXI. ab. VII, den ich x nennen will, auszumessen.

Um dieses zu leisten muß man nach der rdnung folgende Operationen vornehmen.

Erste Operation.

II) Man stelle den Mittelpunkt des Werkugs über die Spitze g des auszumessenden Zinkels P g Q, bringe die Indices der Verniere nau an die ersten Theilstriche des Randes . 132. III.) und wende das ganze Werkug horizontal herum, wie in (§. 132. VI. II.) bis das Fernrohr I n genau nach dem bjecte Q hingerichtet ist.

III) Bey dieser Lage des Fernrohrs sind so bey I die Anfangspunkte beyder Abthei-

lungen des Randes, an denen zugleich die Indices der Verniere anliegen.

IV) Nun löse man die Schraube des Alhidadenhalters, und wende blos das Fernrohr herum, ohne daß sich aber die Ebene des eingetheilten Randes verrücke, und bringe das Fernrohr in die Lage λc, nämlich in die Richtung nach dem Objecte P.

V) So wird der Bogen lλ, den während Herumdrehung des Fernrohrs, der Index des Vernier auf dem Rande durchlaufen hat, das Maaß des Winkels lgλ oder PgQ seyn.

Zweyte Operation.

VI) Man braucht aber den Bogen lλ, als das Maaß des Winkels PgQ oder x, nicht zu untersuchen, sondern fängt sogleich eine neue Operation an, die der ersten völlig ähnlich ist. Nämlich, man läßt das Fernrohr, oder vielmehr den Index des Vernier unverrückt an der Stelle des Randes, wo er am Ende der ersten Operation stand, und wendet nun wieder blos das ganze Werkzeug herum, so daß das Fernrohr λc, welches in Fig. LXXXI. nämlich am Ende der ersten Operation, nach dem Objecte P hinzielte, in die Lage λo Fig. LXXXII. oder in die Richtung nach dem Objecte Q hinkomme.

VII)

VII) Hiedurch kömmt aber, weil die Richtung des Fernrohrs vermittelst der Wendung des ganzen Werkzeugs geschah, die Linie λn Fig. LXXXI. in die punktirte Richtung λn Fig. LXXXII, und so ist zwar jetzt das Fernrohr wieder nach Q gerichtet, aber der Index des V. welcher sich bey 'λ befindet, wird jetzt von dem Punkt l, wo sich auf dem Rande die Abtheilungen anfangen, um den Bogen lλ oder um das Maaß des Winkels x abstehen.

VIII) Man lasse nun wieder das ganze Werkzeug, oder die Ebene des Randes unverrückt, wende blos das Fernrohr, und richte es zum zweytenmahle nach dem Objecte P.

IX) So wird, indem das Fernrohr aus der Lage λc in die Lage λ′ c′, gebracht wird, der Index des Vernier, auf dem Rande abermahls den Bogen λλ′, als das Maaß des Winkels PgQ, beschreiben, und daher ist am Ende dieser zweyten Operation der Index des Vernier bey λ′, und stehet von dem Punkte l, wo sich auf dem Rande die Abtheilungen anfangen, um den Bogen lλλ′, oder um den Winkel 2x, ab.

Dritte und fernere Operation.

X) Wenn man nach diesem Verfahren die Arbeit fortsetzt, und immer wechselsweise, erst mit Wendung des ganzen Werkzeugs.

das Fernrohr nach dem Objecte Q, und dann durch die bloße Herumdrehung der Alhidadenregel, das Fernrohr nach dem Objecte P hinrichtet, so wird z. E. am Anfange der dritten Operation, zwar das Fernrohr wieder nach dem Objecte Q Fig. LXXXIII. gerichtet seyn, und der Index des Vernier von dem Punkte l noch um den Bogen $l\lambda\lambda' = 2x$ abstehen, aber am Ende der dritten Operation, wird, nachdem das Fernrohr in die Richtung $\lambda'' c''$ gebracht worden, sich der Index des Vernier bey λ'' befinden, und abermahls den Bogen $\lambda' \lambda''$ durch Herumdrehung der Alhidadenregel beschrieben haben, dergestalt, daß er alsdann um den Bogen $l\lambda\lambda'\lambda''$ oder um den Winkel $3x$, von dem Punkte l, wo sich auf dem Rande die Abtheilungen anfangen, abstehen wird.

Man siehet hieraus leicht, daß am Ende der 4ten, 5ten, 6ten u. s. Operation, der Index nach der Ordnung um folgende Bogen oder Winkel $4x$, $5x$, $6x$ u. s. w. von dem Punkte l abstehen wird.

XI) Und so wird überhaupt am Ende der nten Operation, der Index des Vernier auf dem Rande einen Bogen beschrieben haben, der eines Winkels $= n \cdot x$ Maaß seyn wird.

XII) Wenn auf diese Art die Operationen mehrere mahle wiederhohlt worden sind, so unter-

tersuche man die Anzahl von Graden und Minuten, die am Ende der letzten (nemlich nten) Operation, der Index des Vernier auf dem Rande weiset, so hat man einen Bogen, der das Maaß des Winkels n . x ist; dieser Bogen heiße A so hat man

$$A = n \cdot x$$

Mithin $\frac{A}{n} = x$.

d. i. die Größe des Bogens durch die Anzahl der Operationen dividiret, giebt den Winkel x oder PgQ, dessen Größe man finden wollte.

Exemp. Am Anfange der ersten Operation stand der Index des Vernier bey I, und zeigte also auf dem Rande 0°. 0′.

Gesetzt nun, am Ende der dritten Operation stünde der Index auf dem Rande bey dem Punkte λ″ Fig. LXXXIII. und der Bogen Iλλ′ λ″ wäre 285° + 20′, so wäre die Anzahl der Operationen oder n = 3; A = 285° + 20′, mithin

$$x = \frac{285° + 20'}{3} = 95°.\ 6'\ 40'',$$ also

so groß der Winkel PgQ.

XIII) In diesem Exempel war am Ende der dritten Operation der Bogen A auf dem Rande kleiner als 360° oder der ganze Umkreis. Es kann aber, wie ein kleines Nach-

denken zeigt, bey oftmaliger Wiederholung der Operation, der von dem Index durchlaufene Bogen A auch größer als 360° werden, ja er kann selbst die ganze Peripherie einigemahl enthalten.

So z. E. ist Fig. LXXXIV. $\lambda'' c''$ die Lage des Fernrohrs beym Anfange der vierten Operation, und der Bogen $l\lambda\lambda'\lambda''$ das Maaß des Winkels $3x$. Wenn nun die Alhidadenregel herumgedrehet, und das Fernrohr abermahls nach P gerichtet, also aus der Lage λ'' c'' in die Lage λ''' c''' gebracht wird, so ist am Ende dieser 4ten Operation der Index des Vernier bey dem Punkte λ''', und hat solchergestalt vom Anfange der ersten Operation bis ans Ende der 4ten, den ganzen Umkreis $l\lambda\lambda'$ λ'' l und noch überdem den Bogen $l\lambda'''$ durchlaufen, und daher ist jetzt

$A =$ dem Bogen $l\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = 360° + l\lambda'''$.

Es habe also überhaupt vom Anfange der ersten Operation bis ans Ende der letzten, der Index des Vernier den ganzen Umkreis des Winkelmessers m mahl, und noch überdem den Bogen a durchlaufen, so ist überhaupt

$$A = m \cdot 360° + a.$$

Und daher

$$x = PgQ = \frac{m \cdot 360° + a}{n}.$$

Ex. Gesetzt, bey Ausmessung eines gewissen Winkels PgQ habe man 10 Operatio-

nen

nen gemacht, der Index des Vernier habe vom Anfange der ersten, bis ans Ende der letzten Operation, nicht nur den ganzen Umkreis 2 mahl, sondern auch noch überdem einen Bogen von 20° durchlaufen, so würde der auszumessende Winkel x oder

$$PgQ = \frac{2 \cdot 360° + 20°}{10} = 74° \text{ seyn.}$$

Weil nämlich für dieses Exempel in obiger Formel n = 10; m = 2 und a = 20° ist.

XIV) Dies ist nun die Methode, welche mein Vater zur genaueren Ausmessung der Winkel zuerst bekannt gemacht hat, und welche in der Folge sowohl in der practischen Geometrie, als auch in der Astronomie mit dem größten Nutzen angewandt worden ist. Er bediente sich derselben zuerst beym Gebrauche des von ihm erfundenen Recipiangle, nur mit einer geringen Abänderung welche die Natur dieses Werkzeugs erfordert, wie man in dem angeführten IIten Bande der Göttingischen Commentarien S. 336 mit mehreren ersehen kann; sodann ferner bey dem Spiegelkreise, welchen er zu astronomischen Winkelmessungen in der Einleitung zu seinen Mondstafeln beschrieben hat. M. s. dessen Tabulae motuum solis et Lunae novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum promota, editae jussu praefectorum rei

rei longitudinariae. Londini 1770. Nunmehr müssen wir noch zeigen, warum dieses Verfahren die Größe eines Winkels dennoch sehr genau giebt, wenn gleich erhebliche Fehler in den Abtheilungen des Werkzeugs vorhanden wären.

XV) Es erhellet nämlich aus der gefundenen Formel (XIII) daß man (1) die Zahl n der Operationen, (2) die Zahl m, wie oft der Index des Vernier den ganzen Umkreis durchlaufen hat, und (3) die Größe des Bogens a, oder die Anzahl von Graden und Minuten, die der Index des V. am Ende der letzten Operation auf dem Rande zeigt, wissen müsse, um die Größe des Winkels x zu erfahren.

Die Werthe von m und n, können nun in jedem Falle sehr leicht, und ohne Fehler angegeben werden, wenn man nur nicht vergißt, am Ende einer jeden Operation etwa ein Zeichen ins Diarium zu machen, und die Anzahl der von dem Index des Vernier vollbrachten Umläufe gehörig zu zählen und anzumerken.

Es wird also nur der Bogen a, dessen Genauigkeit von der Theilung des Werkzeugs, und der Sorgfalt des Beobachters abhängt, den Werth des Winkels x unsicher machen können. Allein es wird sich leicht zeigen, daß, auch in der Bestimmung des Bogens a,

ıerklicher Fehler enthalten wäre, solcher
ıch auf den Winkel x keinen merklichen
uß haben würde, besonders wenn n oder
lnzahl der Operationen groß ist: Gesetzt,
m Exempel XIII. wäre der Bogen a um
ı klein angegeben, oder der eigentliche
e Werth von a wäre 20° + 5′, so be-
man

$$PgQ = \frac{2 \cdot 360° + 20° + 5'}{10}$$

$$\frac{\cdot 360° + 20°}{10} + \frac{5'}{10} = 74°\ 0' \cdot 30''.$$

PgQ nur um 30″ größer als in XIII,
ein Fehler von 5′ den man in der Bestim-
ȷ des Bogens a begangen hätte, würde
:m ausgemessenen Winkel PgQ selbst, nur
Fehler von 30″ oder ½ Minute hervor-
ȷen, wenn nämlich n = 10 wäre, oder
10 Operationen gemacht hätte.

Es sey überhaupt der Fehler im Bogen
μ', so würde dieses bey n Operationen
em Winkel PgQ, nur einen Fehler von $\frac{\mu}{n}$
uten verursachen, wo also $\frac{\mu}{n}$ desto kleiner
je größer n, oder die Zahl der wiederhohl-
Operationen ist.

So erhält man demnach vermittelst dieser Methode, die Größe eines Winkels wie PgQ dennoch sehr genau, wenn gleich solche Fehler in den Eintheilungen des Randes vorhanden wären, daß weder der Bogen a auf dem Rande, noch auch derjenige, welcher dem Winkel PgQ unmittelbar entsprechen würde, sich mit einer größern Genauigkeit als von μ Minuten würde erhalten lassen. Das Verfahren Winkel wie PgQ durch die angeführte Repetitionsmethode zu messen, bringt überhaupt die Größe eines möglichen Fehlers $= \mu$ auf $\frac{\mu}{n}$ zurück, wodurch also wenn μ schon an und für sich klein ist, der Fehler $\frac{\mu}{n}$ bald auf wenige Secunden gebracht werden kann.

Anmerkungen über das bisherige Verfahren.

§. 136. Begreiflich setzt diese Repetitionsmethode voraus, daß so oft bey jeder Operation das Fernrohr durch Drehung der Alhidadenregel nach dem Objecte P hingerichtet wird, die ganze Ebene des Werkzeugs unterdessen keine Verrückung leide. Ist das Werkzeug hinlänglich fest gebaut, und wendet man die gehörigen Vorsichten an, daß sich solches während der Arbeit nicht verrücke, so

wird

vird man zwar so leicht von dieser Seite nichts
u befürchten haben. Um indessen doch voll-
ommen von dem unverrückten Stande des
Werkzeugs während jeder Operation versichert
u seyn, ist es immer rathsam dasselbe mit ei-
em Versicherungs-Fernrohre (§. 130.
III.) zu versehen, wo denn durch Hülfe der
Schrauben L und Wz (Fig. LIX. und §. 99.
16.) jede vermittelst dieses Fernrohres etwa
tdeckte Verrückung des Winkelmessers sehr
cht wieder hergestellt werden kann. Diese
orsichten empfiehlt auch schon Kästner in
astron. Abhandl. Zweyte Samml.
179.

Ehe man demnach bey jeder Operation
neuen die Alhidadenregel drehet, muß das
rsicherungs-Fernrohr allemahl zuvor, ver-
ge der oben §. 131. X. angegebenen Ein-
tung nach einem kenntlichen Punkte eines
egenen Objects eingerichtet werden, welcher
zur Versicherung des unverrückten Stan-
des Werkzeugs dient, während die Alhi-
nregel gedreht wird.

II) Auf die genaue Bestimmung des Win-
x (§. 135. XIII.) haben nun ausser den
ern des Randes (und also des Bogens a)
noch diejenigen Fehler Einfluß, welche
Visiren selbst vorfallen können, und sich
f gründen, daß unser Auge bestimmte

Punkte entfernter Objecte nur alsdann deutlich sehen kann, wenn ihr Sehewinkel nicht allzu klein ist. Ich habe hievon schon im 85. § geredet: Wird nemlich mit bloßen Augen visiret, so kann man an einem entfernten Objecte nur diejenigen Punkte deutlich sehen, die ohngefähr unter einem Winkel von 1′ bis 2′ ins Auge fallen. Es kann demnach der Faden des Objectivdiopters einen gewissen Punkt eines entfernten Objects noch so genau zu decken scheinen, und man bleibt dennoch innerhalb 2′ ungewiß, ob man die Diopteru nicht noch um etwas mehr rechts oder links verrücken soll. Und so entstehen demnach allemahl Fehler im Visiren (Errores collimationis), die desto größer sind, je unvollkommenere Augen man hat.

Bedient man sich aber der Fernröhre an Winkelmessern, so werden diese Fehler im Visiren sehr vermindert, und desto unbeträchtlicher, je mehr das Fernrohr vergrößert, und entfernte Gegenstände deutlich darstellt. Mein Vater hat folgendes Täfelein berechnet, woraus man sogleich ersehen kann, wie groß etwa der Fehler im Visiren bey einer gegebenen Länge des Fernrohrs seyn mag.

Länge

Länge des Fernrohrs in Pariser Maaß.	Fehler im Visiren.
½ Fuß.	15″
1	10
2	7
3	6
6	4
12	3
20	2
30	1″, 15.

Ist ein Fernrohr achromatisch wie . B. an den Ramsdenschen oder Reichen achischen Repetitionskreisen, so weren diese Fehler noch bey weiten geringer, und ey einem Fernrohre von 1 Fuß sich vielleicht aum auf 2 bis 3 Secunden belaufen.

III. Wenn sich also beym Visiren nit bloßen Augen, der Faden eines Obectivdiopters nur höchstens bis 1 oder 2 Miuten genau nach einem Punkte eines entfernten Objects richten läßt, so würde man hingegen en Faden im Brennpunkte eines einschuhigten gewöhnlichen) Fernrohrs so genau nach dem ntfernten Punkte richten können, daß man öchstens nur einen Fehler von 10″ zu beürchten hätte.

So kleine Fehler im Visiren werden aber ey den wiederhohlten Operationen bald auf die

 eine.

ques soit à la mesure de la Terre, soi à la confection du Canevas des Cartes e des Plans. à Paris 1805. In dieser Schri ist der Repetitionskreis nach dem Detail alle einzeln Theile, auf 8 grossen Kupfertafeln ab gebildet, und die Winkelmessungsmethode mi demselben, mit allen dabey erforderlichen Vor sichten umständlich beschrieben. Als eine Fort setzung des angeführten Werks ist auch des Verf. Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement à Paris 1807. zu em pfehlen.

VI. Es ist auch bey solchen Repetitionskreisen, wie überhaupt bey allen winkelmessenden Werk zeugen, welche zu terrestrischen Messungen ge braucht werden, sehr nützlich, wenn das obere Fernrohr in einer auf das Werkzeug senkrech ten Ebene auf- und nieder beweglich ist, kurz wenn es ein Kippfernrohr ist, weil diese Einrichtung die Mühe erspart, auch Höhen und Tiefenwinkel zu nehmen, um die gemesse nen Winkel auf den Horizont zu reduciren. Aber freylich ist dann auch erforderlich, daß sich das Kipprohr auf das allergenaueste in einer solchen senkrechten Ebene auf- und nie derbewege. Wie dies zu bewerkstelligen, lehre ich im zweyten Theile dieser pract. Geo metrie §§. 147. 151. Hr. Reichenbach erhält diese nothwendige Bedingung an seinem Repetitionskreise (M. s. oben §. 89. XIX.) da durch

durch, daß er das Fernrohr an einer Horizontalaxe befestigt, welche sich in zwey vollkommen cylindrische stählerne Zapfen endigt, die in zwey messingenen Pfannen laufen, wovon die eine vermittelst einer Stellschraube, etwas höher oder tiefer gestellt werden kann. Diese Pfannen befinden sich auf zwey Trägern von Messing, welche auf dem Noniuskreise feststehn, dessen Ebene, wie wir schon oben erwähnt haben, mit derjenigen des eingetheilten Randes genau zusammenfällt. An dieser Horizontalaxe des Fernrohrs befindet sich eine Libelle, welche sich, völlig wie bey einem astronomischen Passageinstrument mittelst zweyer Endhaaken an diese Axe anhängen, umwenden, und rectificiren läßt, wodurch denn diese Axe selbst genau horizontal gestellt werden kann (*De la Lande* Astronomie §. 2600. M. s. das Wesentliche dieses Verfahrens, eine Linie, also auch hier, eine Axe, horizontal zu stellen, eine Libelle mag nun angehängt oder auch aufgesetzt werden im IIten Thl. dieser practischen Geom. §. 156. IV). Aber auch selbst die Axe sammt dem Fernrohr läßt sich bey diesen Werkzeugen von den Pfannen abheben, und in umgekehrter Lage wieder auflegen, um zu prüfen, ob auch das Fernrohr selbst, oder eigentlich dessen Visirebene (planum collimationis) (§. 104.) mit der Horizontalaxe, um welche es sich auf- und niederkippet, genau einen rechten Winkel mache, welches bey sehr feinen Mes-

sungen gleichfalls erforderlich ist. (M. s. hier- über den IIten Thl. dieser pr. Geom. §. 150). Um diese Prüfung anzustellen, richtet man die Visirebene des Fernrohrs, mittelst Umdrehung desselben um des Werkzeugs Mittelpunkt, genau nach einem gewissen Punkte eines entfernten Gegenstandes, bringt hierauf die auf den Pfannen ruhende Horizontalaxe sammt dem Fernrohr in eine umgekehrte Lage, so daß der Endzapfen, den man zuvor auf der Pfanne linker Hand, liegen hatte, nun auf die Pfanne rechter Hand zu liegen komme, und siehet zu, ob in dieser umgewandten Lage des Fernrohrs, wenn man es auf und nieder bewegt, die Visirebene desselben, noch immer genau nach dem erwähnten Punkte des Gegenstandes hingerichtet bleibt, und weder rechts noch links davon abweicht. Trifft dies zu, so ist man versichert, daß die Visirebene auf obgedachter Horizontalaxe senkrecht steht. Zeigt sich aber eine kleine Abweichung (viel wird sie nie betragen, weil ein Kipprohr fast für allen Gebrauch nur um wenige Grade auf und nieder beweglich zu seyn braucht, so ist die Einrichtung gemacht, daß man die Fassung des Fadenkreuzes im Brennpunkte des Fernrohrs durch Stellschräubchen etwas rechts oder links verschieben, und dadurch die Visirebene berichtigen kann. Da nemlich in der erwähnten umgekehrten Lage des Fernrohres, die Visirebene um den doppelten Collimationsfehler rechts oder links von dem Punkte des Gegen-

stan-

standes abweichen muß, wie sich leicht nach einiger Ueberlegung zeigt, so nähere man mittelst gedachter Schräubchen die Verticallinie des Fadenkreuzes dem gedachten Punkte um die Hälfte der gefundenen Abweichung, und lasse hierauf, durch die Bewegung des Fernrohres um den Mittelpunkt des Werkzeugs, die Visirebene wieder auf den Gegenstand einspielen, so wird man finden, daß wenn nun die Horizontalaxe auf ihren Pfannen wieder umgewechselt wird, die Visirebene des Fernrohres berichtiget seyn wird; und sollte sich auch noch eine kleine Abweichung zeigen, so kann man auch diese noch weiter corrigiren, bis endlich das Fernrohr immer nach demselben Punkte des Gegenstandes hinzielet, man mag die obgedachten Endzapfen auf ihren Unterlagen wechseln, wie man will.

Wie man bey einer jeden andern Einrichtung des Kipprohres eine ähnliche Verification desselben, wird bewerkstelligen können, läßt sich aus dem angeführten hinlänglich abnehmen. Begreiflich wird es gut seyn, wenn auch die Einrichtung bey dem Fernrohre Fig. LXVII. so beschaffen ist, daß die Fassung des Fadenkreuzes Fig. LXVII. nur durch Schräubchen in dem Brennpunkte festgehalten wird, und daher etwas rechts oder links im Brennpunkte verschoben werden kann. Auch ließe sich die Visirebene dadurch etwas rechts oder links

errichten, daß man vielmehr dem Fernrohre in der Hülse K durch eine leicht zu erdenkende Vorrichtung eine kleine Seitenbewegung verschaffte.

Selbst an den kleinsten Werkzeugen welche Hr. Reichenbach verfertigt z. B. an Repetitions-Theodoliten welche nur 8 Zoll im Durchmesser haben, sind dennoch alle Vorrichtungen angebracht, welche zur Rectification einzelner Theile eines solchen Werkzeugs erforderlich sind, und dies wird man an so kleinen Kreisen um so weniger überflüssig finden, da sie ohngeachtet dieser geringen Größe, die Winkel dennoch innerhalb 5 bis 10 Secunden genau messen, wie man aus des Freyh. v. Zachs monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde im Aprilstück 1812. S. 346. u. 353 mit mehreren ersehen kann. So sind denn dergleichen Theodoliten, wie a. a. O. erwähnt wird, selbst für die allergenauesten geodätischen Messungen hinlänglich, und zugleich deswegen zu empfehlen, weil sie wegen ihres sehr geringen Gewichtes so transportabel sind, und so wenig Raum einnehmen, daß man sie sehr leicht auf alle Berge und Thürme bringen, und in allen Schall-Löchern, Mauerscharten und Dachfenstern aufstellen kann. Freylich gehören denn zu solchen Werkzeugen auch geübte Beobachter, welche sich auf das genaueste mit

den

den gröbern und feinern Stellungen derselben bekannt gemacht haben.

Verschiedene interessante Bemerkungen über den Gebrauch der Repetitionskreise, und der Art damit zu beobachten, hat auch Hr. Prof. Benzenberg nebst einer kurzen Beschreibung dieser Werkzeuge im Berliner Astronomischen Jahrbuche 1813. S. 147 ꝛc. mitgetheilt.

Aufgabe.

§. 137. Einen Winkel PgQ Fig. LXXXI. vermittelst der Boussole §. 119. auszumessen.

Aufl. Man bringe die Boussole, nachdem sie auf ein zugehöriges Stativ gesetzt worden, über die Spitze g des auszumessenden Winkels PgQ, und gebe ihr eine horizontale Stellung. Hierauf wende man das ganze Werkzeug herum, bis man durch die Diopptern den Gegenstand P wahrnimmt. In dieser Lage der Dioptern lasse man die Magnetnadel zur Ruhe kommen, und bemerke hierauf, was ihre nördliche Spitze auf dem eingetheilten Ringe für Grade und Minuten weiset: die Minuten muß man bey der gewöhnlichen Einrichtung der Boussole freylich nur nach dem Augenmaaße schätzen. Ich will setzen, die Magnetnadel wiese 30°

— o —

Nun wende man die ganze Boussole weiter herum, bis man durch die Diopteren den Gegenstand Q erblicket, und bemerke, nachdem die Nadel in Ruhe gekommen, abermahls den Stand ihrer nördlichen Spitze. Ich will annehmen, sie wiese jetzt 65° 20′.

Von diesem Stande der Nadel ziehe man den ersteren ab, so hat man den Winkel PgQ beyder Objecte; also wäre hier

$$PgQ = 65°.20' - 30°.18' = 35°.2'.$$

Der Beweis dieses Verfahrens ist sehr leicht, denn die zuerst gefundenen 30° 18′ zeigen an, daß der Schenkel Pg des Winkels PgQ mit der unveränderlichen Richtung der Magnetnadel einen Winkel von 30° 18′ macht.

Hingegen die zuletzt gefundenen 65° 20′ geben den Winkel des andern Schenkels gQ mit der Richtung der Magnetnadel; daher muß der Unterschied 65° 20′ — 30° 18′ = 35° 2′ den Winkel PgQ geben, den die Schenkel Pg, gQ, für sich allein mit einander machen. Und so wird man leicht sehen, wie in andern Fällen zu verfahren ist, auch wie der Winkel, den eine Linie wie gQ mit der Richtung der Magnetnadel macht, gefunden werden könne, wenn die Boussole die Einrichtung (§. 119. II.) hätte.

Anmer=

Anmerkung.

§. 138. I. Eigentlich kann man wohl nicht verlangen, mit der Boussole einen Winkel sehr genau zu messen, selbst wenn sie mit einem Vernier versehen wäre (§. 119. II.), weil es sehr schwer hält, die Nadel in vollkommene Ruhe zu bringen, und die geringste Bewegung der Luft das Werkzeug so erschüttert, daß man in der Beobachtung des Einspielens der Magnetnadel, um mehrere Theile des Vernier fehlen kann.

Ausser den (§. 120 ꝛc.) angeführten Vorsichten beym Gebrauche der Magnetnadeln, und folglich auch der Boussole zu Ausmessung der Winkel empfiehlt Bugge in dem oben (§. 31.) angeführten Buche §. 56. auch die möglichste Verhütung irgend eines Einflusses von Electricität auf die Nadel. Man solle also z. B. den Glasdeckel einer Boussole, kurz vor ihrem Gebrauche, nicht mit einer trocknen Hand, oder einem trocknen Tuche abwischen, weil dadurch das Glas leicht electrisch werde, und den Stand der Magnetnadel stören könne. Sollte einige Electricität zu befürchten seyn; so müsse man sie durch etwas Feuchtigkeit, z. B. durch einen Hauch und andere bekannte Mittel wieder wegzuschaffen suchen. Ferner erhalte das Glas selbst etwas Electricität, wenn es nur einige Zeit den Sonnenstrahlen ausgesetzt

sey. Auch weiche die Magnetnadel bey Gewittern, beym Nordlichte u. dgl. oft merklich von ihrer wahren Richtung ab. Man habe demnach Ursache bey dem Gebrauche der Magnetnadeln alle mögliche Vorsichten anzuwenden.

Indessen giebt es doch in der Feldmeßkunst häufig Fälle, wo eben nicht die größte Genauigkeit erforderlich ist, und wobey die Magnetnadel den Vortheil verschafft, daß ihre Richtungen Parallellinien darstellen, wodurch die Auflösung mancher Aufgaben sehr erleichtert wird, wie ich in der Folge zeigen werde. Bis dahin verspare ich denn auch noch verschiedene andere, den Gebrauch der Magnetnadel betreffende Anmerkungen.

II) Das bisherige mag demnach zureichen, allgemein zu übersehen, worauf es bey Ausmessung der Winkel auf dem Felde ankomme. Ich habe, so viel als möglich, das praktische Verfahren davon deutlich gewiesen. Uebung ist aber auch hier, wie bey allen Geschäfften, nöthig, und ich rathe daher, sich nicht eher an zusammengesetzte Feldmesserarbeiten zu wagen, als bis man es in Ausmessung gerader Linien und Winkel zur gehörigen Fertigkeit gebracht hat.

Ich will nun noch zum Schlusse dieses Kapitels etwas von der Methode beybringen, deren sich einige Feldmesser bedienen, bloß ver-

vermittelst der Meßkette, die Größe eines Winkels auf dem Felde zu bestimmen.

III) Dieses Verfahren beruhet bloß auf den Satz §. 106. die Größe eines Winkels vermittelst seiner Sehne zu erfahren, und wird auf dem Felde auf folgende Art bewerkstelligt.

Es sey Fig. LII. Tab. IV. PgQ der auszumessende Winkel.

Man spanne in die Richtung gQ, mit aller möglichen Sorgfalt von g nach i die Länge einer Meßkette aus, und bemerke den Punkt i vermittelst eines Zeichenstäbgens. Hierauf lasse man den einen Kettenstab unverrückt bey g stehen, und begebe sich mit der ausgespannten Kette aus der Richtung gi, in die gl, so daß gl genau in der geraden Linie gP ausgespannt werde, so hat man von g bis l abermahls eine Kettenlänge, und weil gi = gl gemacht worden, so ist li des Winkels igl oder QgP Chorde.

Man messe also genau die Weite li so wird sich daraus des Winkels PgQ Größe bestimmen.

Gesetzt, es sey die gebrauchte Kettenlänge $= 50° = 5000'''$ die gemessene Chorde $li = w$, und der zu bestimmende Winkel $PgQ = \alpha$;

So

sey. Auch weiche die Magnetnadel bey Gewittern, beym Nordlichte u. dgl. oft merklich von ihrer wahren Richtung ab. Man habe demnach Ursache bey dem Gebrauche der Magnetnadeln alle mögliche Vorsichten anzuwenden.

Indessen giebt es doch in der Feldmeßkunst häufig Fälle, wo eben nicht die größte Genauigkeit erforderlich ist, und wobey die Magnetnadel den Vortheil verschafft, daß ihre Richtungen Parallellinien darstellen, wodurch die Auflösung mancher Aufgaben sehr erleichtert wird, wie ich in der Folge zeigen werde. Bis dahin verspare ich denn auch noch verschiedene andere, den Gebrauch der Magnetnadel betreffende Anmerkungen.

II) Das bisherige mag demnach zureichen, allgemein zu übersehen, worauf es bey Ausmessung der Winkel auf dem Felde ankomme. Ich habe, so viel als möglich, das praktische Verfahren davon deutlich gewiesen. Uebung ist aber auch hier, wie bey allen Geschäfften, nöthig, und ich rathe daher, sich nicht eher an zusammengesetzte Feldmesserarbeiten zu wagen, als bis man es in Ausmessung gerader Linien und Winkel zur gehörigen Fertigkeit gebracht hat.

Ich will nun noch zum Schlusse dieses Kapitels etwas von der Methode beybringen, deren sich einige Feldmesser bedienen, bloß

vermittelst der Meßkette, die Größe eines Winkels auf dem Felde zu bestimmen.

III) Dieses Verfahren beruhet bloß auf den Satz §. 106. die Größe eines Winkels vermittelst seiner Sehne zu erfahren, und wird auf dem Felde auf folgende Art bewerkstelligt.

Es sey Fig. LII. Tab. IV. PgQ der auszumessende Winkel.

Man spanne in die Richtung gQ, mit aller möglichen Sorgfalt von g nach i die Länge einer Meßkette aus, und bemerke den Punkt i vermittelst eines Zeichenstäbgens. Hierauf lasse man den einen Kettenstab unverrückt bey g stehen, und begebe sich mit der ausgespannten Kette aus der Richtung gi, in die gl, so daß gl genau in der geraden Linie gP ausgespannt werde, so hat man von g bis l abermahls eine Kettenlänge, und weil gi = gl gemacht worden, so ist li des Winkels igl oder QgP Chorde.

Man messe also genau die Weite li, so wird sich daraus des Winkels PgQ Größe bestimmen.

Gesetzt, es sey die gebrauchte Kettenlänge $= 50^{\circ} = 5000'''$ die gemessene Chorde li = w, und der zu bestimmende Winkel PgQ = α;

So

So kann man li = w, als Chorde des Winkels α für den Halbmesser gi = 5000''', betrachten. Man setze den Halbmesser gi = R so ist aus der Gleichung §. 106. 4. die Chorde il oder

$$w = \frac{2 \cdot R \sin \frac{1}{2} \alpha}{10000000}$$

Also umgekehrt

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{w \cdot 10000000}{2 \cdot R}$$

Mithin wegen R = 5000'''

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = w \cdot 1000$$

d. h. die Anzahl von Linien, die auf die gemessene Chorde w gehen, mit der Zahl 1000 multipliciret giebt den Sinus des halben Winkels PgQ; woraus sich denn der ganze Winkel PgQ ergiebt.

Ex. Gesetzt die gemessene Chorde li = w sey 4650 Linien gefunden worden, so würde,

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = 4650 \cdot 1000 = 4650000$$

Mithin aus den Sinustafeln

$$\frac{1}{2} \alpha = 27^{\circ} \cdot 42' + \text{ also}$$

$$\alpha = 55^{\circ} \cdot 24' +$$

die Secunden nicht mitgerechnet, auf die man sich bey dieser Methode, doch nicht genau verlassen kann.

Da:

Damit man nicht nöthig habe, in jedem Falle erst die Berechnung anzustellen, so kann man ein für allemal für eine gegebene Kettenlänge, eine Chordentafel berechnen; alsdann braucht man nur die gemessene Chorde in der Tafel aufzusuchen, und man hat sogleich den zugehörigen Winkel.

In verschiedenen Büchern findet man dergleichen Tafeln schon berechnet, z. E. in Branders Beschreibung seines amphidioptrischen Goniometers. Joh. Paul Eberhards Beschreibung einer neuen Meßtafel. Halle 1753. Friedr. Christ. Jetze, gemeinnützige Praxis, auf dem Felde und Papier ohne Winkelinstrumente alle Winkel zu messen, und überzutragen. Bresl. und Leipzig 1776.

In dieser leztern Schrift ist besonders die Aufgabe, vermittelst der Meßkette, Winkel zu bestimmen, weitläuftig auseinander gesezt, und auf verschiedene Fälle in der praktischen Geometrie angewandt.

Auch handelt hievon Fr. Ch. Müllers Beschreibung einer neuen und vollkommenen Art Plans aufzunehmen und zu verzeichnen. Frankf. 1774.

In Wilkens Landesvermessungen §. 245. findet man ebenfalls diese Aufgabe auseinander gesetzt.

Im Grunde kann aber das gewiesene Verfahren nur auf einem ebenen Felde mit Zuverlässigkeit ausgeübt werden. In bergichten Gegenden würde es selten anwendbar seyn. Aber auch auf ebenem Felde erfordert es schon besondere Sorgfalt im Anspannen der Meßkette, im Einsetzen der Kettenstäbe u. dgl., daher die §. 33 und 46. gegebenen Vorschriften aufs genaueste zu befolgen sind.

IX. Kapitel.

Noch einige Methoden, Winkel aufs Papier abzutragen, und zu verzeichnen.

§. 139. Ich habe schon §. 106. die Einrichtung des geradlinigten Transporteurs erklärt, und gezeigt, wie man vermittelst desselben auf dem Papiere sowohl einen Winkel verzeichnen, als auch messen könne.

Diesem Verfahren kann man nun noch folgende Methoden beyfügen.

I. Jeder tausendtheiligte Maaßstab ist zugleich ein geradlinigter Transporteur.

Denn man kann vermittelst desselben, wenn man nur Sinustafeln bey der Hand hat, ebenfalls die Größe eines vorgegebenen Winkels auf dem Papiere sowohl verzeichnen, als messen.

Erstlich. Einen Winkel zu verzeichnen.

Gesetzt, man solle Fig. LII. an den Punkt g und an die Linie glP einen Winkel igl von 66° 30′ verzeichnen.

Aufl. Man fasse mit einem Handzirkel auf dem tausendtheiligten Maaßstabe, genau die Weite von 1000 Theilen, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche der Feldmesser, eine Weite von 10° 0′ 0″; setze die eine Zirkelspitze in g ein, beschreibe mit der andern einen Kreisbogen lni, und suche nun für den Halbmesser 1000, aus den Sinustafeln den Sinus von $\frac{66° . 30′}{2}$ oder von 33° 15′. (S. 106. 4.) dieser findet sich = 548, 2932; das doppelte hievon giebt für den Halbmesser 1000 die Chorde von 66° 30′. Also ist

Chord. 66° 30′ = 1096, 5864,

oder die Decimalbrüche weggelassen

Chord. 66° 30′ = 1096,

d. i. die Chorde von 66° 30′ hält 1096 Theile des tausendtheiligten Maaßstabes; man fasse also von dem Maaßstabe eine Weite von 10° 9″ 6‴, setze sie als Chorde von l nach i, und ziehe hierauf gi, so wird der Winkel lgi = 66° 30′ seyn.

Zwey

Zweytens. Den auf dem Papiere vorgegebenen Winkel lgi zu messen.

Aufl. Man beschreibe wieder mit dem Halbmesser 1000, dessen Größe man von dem Maaßstabe abnimmt, den Bogen lni zwischen die Schenkel des vorgegebenen Winkels, fasse hierauf mit dem Zirkel die Chorde li und trage sie auf den tausendtheiligten Maaßstab; gesetzt, man fände li = 3° 4′ 6″ oder li = 346 Tausendtheilchen des Maaßstabes; die Hälfte hievon 173 ist der Sinus des halben Winkels lgi, für den Halbmesser oder Sinustotus = 1000. Man multiplicire also 173 mit 10000, so hat man den Sinus des halben Winkels lgi für den Sinus totus = 10000000, d. h. für den Halbmesser der Sinustafeln. Also ist

$\sin \frac{1}{2} lgi = 1730000$

daher aus den Sinustafeln

$\frac{1}{2} lgi = 9° \ 57' +$ Mithin der Winkel $lgi = 19° . 54' +$.

Anmerk. Ist der Winkel lgi stumpf, so kann man seinen Nebenwinkel messen, und solchen von 180° abziehen, um lgi zu erhalten.

Man könnte auch so verfahren:

Zwischen den Schenkeln des stumpfen Winkels beschreibe man mit dem Halbmesser = 1000, einen Kreisbogen, und trage den Halbmesser, als Sehne von 60°, so oft auf diesen Bogen, als es angehet, bis ein Bogen, den ich a nennen will, übrig bleibt, der kleiner als 60° ist. Man messe die Chorde dieses Bogens, und bestimme daraus dessen Größe. Hierauf addire man zu dem gefundenen Bogen a so oft 60°, als man den Halbmesser auf den Bogen, der dem stumpfen Winkel zugehört, getragen hat, so hat man die Größe des auszumessenden stumpfen Winkels. Gesetzt, in Fig. LXXXII. sey der stumpfe Winkel cgc' zu messen. Mit dem Halbmesser gc = 1000 sey also der Kreisbogen clc' beschrieben; der Halbmesser gc passe z. E. nur einmahl auf den Bogen clc', nämlich von c nach l; und es bleibe der Bogen c'l < 60° übrig. Man fasse die Chorde c'l, trage sie auf den tausendtheiligten Maaßstab, und bestimme daraus, wie gewiesen worden, den Bogen c'l oder den zugehörigen Winkel lgc'; Ich will setzen, man habe lgc' = 49° 54', gefunden; hierzu addire man den Winkel cgl = 60°, so hat man cgc' = 109°. 54'.

II.

I. Noch eine andere Methode, die Winkel zu messen, und zu verzeichnen.

In einem rechtwinklichten Dreyecke ACG Fig. XIV. Tab. I. ist AC die Tangente des Winkels CGA, wenn man CG für den Halbmesser annimmt. Nimmt man hingegen die Hypothenuse AG für den Halbmesser an, so ist AC der Sinus des Winkels AGC, CG aber der Kosinus desselben.

Dieses giebt folgende Methode, zu finden, wie viel Grade und Minuten ein auf dem Papiere vorgegebener Winkel CGA enthält.

Nemlich von einem tausendtheilichten Maaßstaabe nehme man 1000 Theile ab, und trage sie von G nach A, auf den einen Schenkel des vorgezeichneten Winkels. Von A fälle man auf den andern Schenkel CG das Perpendickel AC herab, und untersuche, wie viel Tausendtheile eben desselben Maaßstabes das Perpendickel AC hält. Dann suche man in den Sinustafeln einen Sinus auf, dessen erste Ziffern, nach Abschneidung der vier letztern, mit der gefundenen Grösse des Perpendickels AC übereinkommen, so hat man den Winkel CGA, der dem Sinus AC zugehört.

Ex. Gesetzt, man habe auf dem tausendtheilichten Maaßstabe gefunden AC = 173

Theilen. Wenn man nun in den Sinustafeln den Sinus von 9° 58′ aufsucht, so findet man, daß nach Weglassung der letztern 4 Ziffern, dessen erste drey Ziffern, mit der für das Perpendickel AC gefundenen Zahl 173 übereinkommen; daher wird der Winkel G = 9° 58′ seyn.

Wollte man umgekehrt an den Punkt G einen Winkel von 60° 55′ verzeichnen, so ziehe man durch G eine gerade Linie GC, und mache solche so viel Theilen des tausendtheilichten Maaßstabes gleich, so viel die Zahl angiebt, welche man nach Weglassung der letzten 4 Ziffern für den Kosinus von 60° 55′ erhält. Nun ist den Tafeln Cos 60° 55′ = 4860812, hievon die letztern 4 Ziffern weggelassen, giebt die Zahl 486. So viel Tausendtheilchen des Maaßstabes trage man also von G nach C. Durch C errichte man hierauf ein Perpendickel CA, und trage auf CA so viel Theile des Maaßstabes, als die Zahl andeutet, welche man erhält, wenn man von dem Sinus von 60° 55′ die letztern vier Ziffern wegläßet. Nun ist Sin 60° 55′ = 8739136 daher nehme man CA = 873 oder (wegen der Zahl 9, welche auf die 3 folgt) beynahe 874 Theilen des Maaßstabes gleich, und ziehe demnächst die Linie AG, so wird der Winkel G = 60° 55′ seyn.

Man könnte auch GC = 1000 Theilen des Maaßstabes nehmen, und dann auf das Perpendickel CA so viel Theile setzen, als nach Weglassung der letzten 4 Ziffern für die Tangente von 60° 55′ stehen bleiben, so würde ebenfalls CGA = 60° 55′.

Diese letztere Methode, wobey man sich der Tangente bedient, ist aber nicht zu gebrauchen, wenn der zu verzeichnende Winkel nahe an 90° kömmt, weil alsdann die Tangente desselben gar zu groß wird.

Solchergestalt findet man vermittelst des bisher beschriebenen Verfahrens den Winkel CGA zwar nicht völlig genau in einzeln Minuten, aber doch wenigstens bis auf 4 oder 5 Minuten genau, so lange der Winkel CGA nicht über 50° ist. Die Ursache liegt darinnen, weil für größere Winkel die ersten drey Ziffern eines jeden Sinus, einerley sind, wenn die zugehörigen Winkel auch gleich um 5 und mehrere Minuten von einander unterschieden wären. So sind z. E. die ersten drey Ziffern der Sinusse von 65° und von 65° 5′ = 906. Ja, wenn die Winkel nahe an 90° kommen, so können sie sich wohl um einen ganzen Grad ändern, ohne daß die erstern drey Ziffern ihrer Sinusse von einander unterschieden wären. Z. E. Sin 88° = 999307; Sin 89° = 9998477, wo also die ersten drey Ziffern der Si-

Sinusse = 999 sind, obgleich die Winkel u
einen ganzen Grad von einander unterschi
den sind.

Wollte man nemlich die Winkel genaue
verzeichnen, so müßte man dem bisherigen
Halbmesser GC mehr als 1000 Theile geben.
Dann würde er aber wegen seiner Größe für
den Gebrauch auf dem Papiere zu unbequem
werden.

In Lamberts Beyträgen zur Mathematik II. Theil p. 170 befindet sich ein Werkzeug beschrieben, welches ebenfalls sowohl zur Verzeichnung, als zur Ausmessung der Winkel auf dem Papiere dienet. Die Einrichtung desselben beruhet auf der Methode, die Winkel durch ihre Tangenten zu bestimmen, und bestehet bloß in einem gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecke von Holz, Elfenbein oder Metall, auf dessen Katheten die Tangenten der Winkel von 0° bis 45° nach einem tausendtheiligten Maaßstabe verzeichnet sind; so daß jeder Kathete (als Tangente von 45°) 1000 Theile des Maaßstabes enthält; das weitere hievon kann man a. a. O. selbst nachlesen.

III) Man kann sich auch des Verfahrens §. 83. 1. zur Ausmessung eines Winkels auf dem Papiere bedienen. Es wird nemlich das

dor-

dortige Verfahren nur auf Kreisbogen angewandt, die dem auszumessenden Winkel zugehören. Gesetzt also, es sey Fig. LXXXII. der Winkel cgl auszumessen; um nun dieses nach der §. 83. 1. gegebenen Methode zu leisten, beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser einen Halbkreis clλ, so ist der Bogen clλ ein bekannter Bogen = 180°. Weiß man nun das Verhältniß der beyden Bogen lc, clλ, so hat man auch die Größe des Bogens lc, folglich des zugehörigen Winkels lgc. Man trage also nach §. 83. den Bogen lc auf den Halbkreis clλ so oft es angehet; Ich will setzen lc = a passe auf clλ = 180°, m mahl, und es bleibe noch ein Stückgen = α übrig, so hat man die erste Gleichung.

$$\text{I)}\quad ma + \alpha = 180°.$$

Ferner trage man das übergebliebene Stückgen α auf den Bogen a so oft es angehet. Z. E. n mahl, und es bleibe das Stückgen β übrig, so ist.

$$\text{II)}\quad n.\alpha + \beta = a;$$

passete eben so das übergebliebene Stückgen β auf α, r mahl, und es bliebe nun das Stückgen γ übrig, so ist

$$\text{III)}\quad r.\beta + \gamma = \alpha.$$

Auf diese Art setze man die Arbeit so lange fort, bis man endlich auf einen so kleinen Bogen kommt, der sich mit dem nächstvorhergehenden bequem nach dem Augenmaaße vergleichen läßt. Ich will setzen, γ sey dieser kleine Bogen, der sich mit dem nächstvorhergehenden bequem nach dem Augenmaaße vergleichen ließe; Es sey also endlich

$$\text{IV)}\quad \gamma = \frac{\varphi}{\psi} \cdot \beta,$$

so kann man aus den gefundenen Vergleichungen, es mögen ihrer so viele seyn, wie man will, die Größe des Bogens $lc = a$ berechnen. Hier würde nun z. E. (aus der Gleichung IV. den Werth von γ in die III gesetzt,) sich erstlich ergeben,

$$r.\ \beta + \frac{\varphi}{\psi}\beta = \alpha$$

also $\beta = \dfrac{\alpha\psi}{r\psi + \varphi}$; dieß in II gesetzt gäbe

$$n\alpha + \frac{\psi}{r\psi + \varphi}\alpha = a, \text{ also}$$

$$\alpha = \frac{r\psi + \varphi}{(r\psi + \varphi)\,n + \psi} \cdot a,$$

und dies endlich in I gesetzt gäbe

$$m \cdot a + \frac{(r\psi + \varphi)\,a}{(r\psi + \varphi)\,n + \psi} = 180^\circ \text{ Mithin}$$

$$\frac{(r\psi + \varphi)\,n + \psi}{((r\psi + \varphi)\,n + \psi)\,m + r\psi + \varphi} \cdot 180^\circ$$

$a = cl.$

Er.

Ex. Für $m = 2$, $n = 1$; $r = 1$, $\varphi = 2$, $\psi = 3$; würde der Bogen lc oder

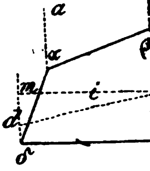
$a = \frac{8}{21} \cdot 180° = 68° \cdot 34'$, also so groß auch der Winkel lgc.

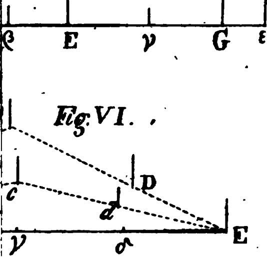
IV) Der Gebrauch des gewöhnlichen Transporteurs zum Auftragen der Winkel in der praktischen Geometrie ist sehr unsicher, und ich wollte nie rathen, sich desselben zu bedienen, wo einige Genauigkeit verlangt wird.

Ende des ersten Theils.

Tab. 1.

Fig. III.





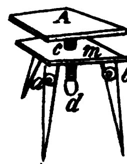
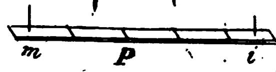
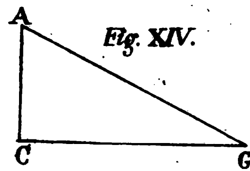


Fig. XII.





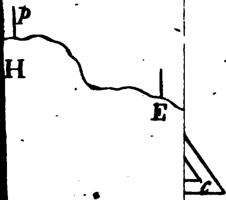
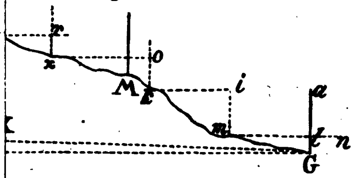


Fig. X



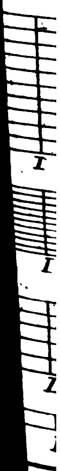
Fig. XVI.



h







Tab. II.

Fig. XXIV.

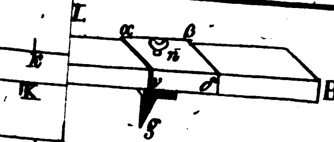
Fig. XX

Fig. XXII.

Fig. XXXII.

Fig. XXXVIII.

Tab. III.





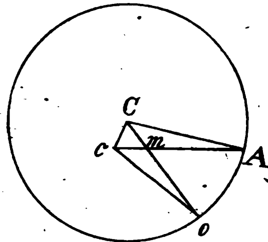
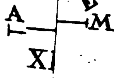


Fig. XLIX.



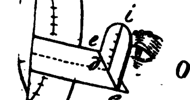


Fig. XLVIII.

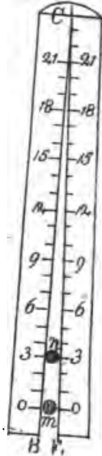
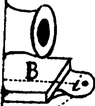


Fig. XL VIII.*

Tab. IV.



ig. LIV.

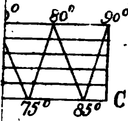


Fig. LIII.

Fig. LI.

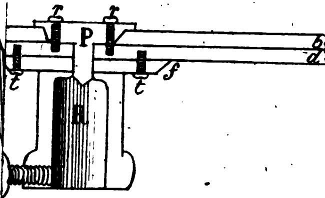
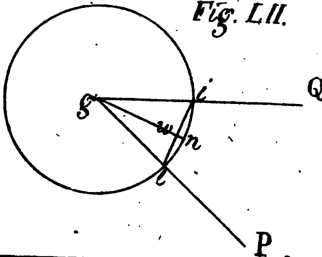
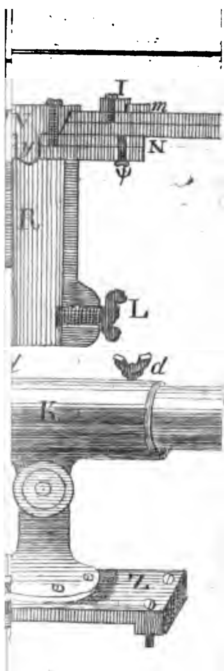


Fig. LII.




I
m
N
L
d
K
L


R
L

Tab.VI.

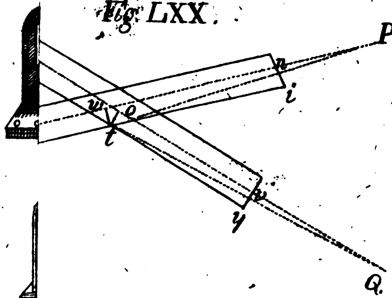


Fig. LXXIII.

H



Fig. LXXIV.



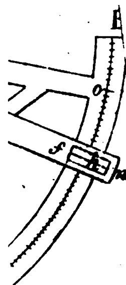
Tab. VII.

s
v

LXXIX.

R.

P



Q

VII.

p

q

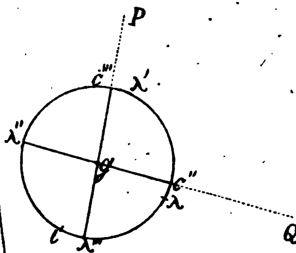


Fig. LXXXIV.

b c d

